

Devoir de mathématiques n° 1

pour mardi 19 septembre 2017

EXERCICE 1 Fonction rationnelle et suite du type $u_n = f(n)$

Soit la fonction rationnelle f définie sur $D = \mathbb{R}_{\setminus \{-1;0\}}$ par $f(x) = \frac{2x^2 + ax + b}{x^2 + x}$ où a et b sont des réels.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

- ✓ (1. Déterminer a et b tels que la droite T d'équation $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$ soit tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A de coordonnées $(1; \frac{3}{2})$.
- ✗ (2. Montrer que, pour tout $x \in D$, on a : $f(x) = 2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$.
- ✗ (3. Déterminer la dérivée de f , puis dresser le tableau de variation de f sur D .
- 4. Soit u la suite définie pour tout n non nul par : $u_n = 2 - f(n)$
 - ✓ (a) Calculer les valeurs approchées à 10^{-2} de ses 10 premiers termes.
 - ✗ (b) Déterminer le sens de variation de u .

EXERCICE 2 Suite définie par une formule de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$

- ✓ (1. Montrer que pour tout réel x , $f(x) \geq x + 1$.
- 2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - ✓ (a) Construire la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormal (unité graphique : 0,5 cm) puis représenter sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite u sans les calculer.
 - ✓ (b) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n + 1$
 - ✓ (c) En déduire le sens de variation de la suite u .
 - ✗ (d) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0 + n$
 - ✗ (e) En déduire le comportement de la suite u à l'infini.

EXERCICE 3 Un peu d'imagination !

Donner dans chaque cas, un exemple de suite (u_n) vérifiant les conditions données :

- ✗ 1. (u_n) est majorée et non minorée.
- ✗ 2. (u_n) n'est ni majorée ni minorée.
- ✗ 3. (u_n) est une suite géométrique non monotone.
- ✗ 4. (u_n) est une suite géométrique croissante de raison q avec $q \in]0; 1[$