

### Problème 2 Enoncé

Problème en correction par les pairs, à envoyer à la correction avant le 13/08.

On considère l'équation du second degré dépendante du paramètre réel  $m$  :  
 $(m^2 - 1)x^2 + 2mx - \sqrt{2}m = 0$  ( $E(m)$ )

1) Pour quelles valeurs de  $m$  l'équation ( $E(m)$ ) est une équation du premier degré ?

Résoudre l'équation dans ce cas.

Pour toute la suite du problème, on suppose que le paramètre  $m$  est différent de  $-1$  et  $1$ .

2) Calculer le discriminant réduit  $\Delta'(m)$  de l'équation et démontrer que l'équation admet une racine double si et seulement si  $m \in \{-\sqrt{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$ .

3) Etudier, en fonction du paramètre  $m$  le signe du discriminant  $\Delta'(m)$ .  
En déduire, en fonction du paramètre  $m$ , le nombre de racines réelles de l'équation ( $E$ ).

On désigne par  $x_1(m)$  et  $x_2(m)$  les racines de l'équation ( $E(m)$ ), quand elle existent.

4) Déterminer  $S(m) = x_1(m) + x_2(m)$  pour les valeurs de  $m$  pour lesquelles l'équation admet deux racines réelles et étudier le signe de la fonction  $S$ , pour  $m \in \mathbb{R}$ .

5) Déterminer  $P(m) = x_1(m)x_2(m)$  en fonction de  $m$  pour les valeurs de  $m$  pour lesquelles l'équation admet deux racines réelles et étudier le signe de la fonction  $P$ , pour  $m \in \mathbb{R}$ .

6) En déduire pour quelles valeurs de  $m$  l'équation  $E(m)$  a deux racines réelles distinctes de même signe.

Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel  $m$ , le signe des racines.

7) Déterminer un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}$  tel que :

Pour tout nombre réel  $m$  appartenant à  $A$ , l'équation ( $E(m)$ ) a deux racines réelles de signes distincts.

On désigne alors par  $x_1(m)$  la racine négative et par  $x_2(m)$  la racine positive.  
Déterminer en fonction des valeurs de  $m$  appartenant à  $A$ ,  $\text{Max}(|x_1(m)|, |x_2(m)|)$ .

8) a) Exprimer en fonction du paramètre  $m$  les racines  $x_1(m)$  et  $x_2(m)$

b) Déterminer toutes les valeurs du paramètre  $m$  pour lesquelles l'équation ( $E(m)$ ) admet 0 pour racine double.

c) Existe-t-il des valeurs du paramètre  $m$  pour lesquelles l'équation  $(E(m))$  admet pour racines 0 et un nombre réel strictement positif ?

d) Existe-t-il des valeurs du paramètre  $m$  pour lesquelles l'équation  $(E(m))$  admet pour racines 0 et un nombre réel strictement négatif ?