$(E(m))\ :\ (m^2-1)x^2+2mx-\sqrt{2}\,m = 0$

1) $(E(m))$ est de degré si $m^2-1 = 0$, autrement dit si $m = -1$ ou $m = 1$

$\underline{m = 1}$: $2x-\sqrt{2} = 0 \iff x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\underline{m = -1}$: $-2x+\sqrt{2} = 0 \iff x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2) $b = 2b' \iff b' = m$

$\Delta'(m) = b'^2-ac = m^2-(m^2-1)\times(-\sqrt{2}\,m) = \sqrt{2}\,m^3+m^2-\sqrt{2}\,m = m(\sqrt{2}\,m^2+m-\sqrt{2})$

L'équation admet une racine double $\iff \Delta'(m) = 0$

Une racine évidente est $m = 0$, les autres racines sont solutions de

$\sqrt{2}\,m^2+m-\sqrt{2} = 0$

$\Delta = 9$

$x_1 = \dfrac{-1-3}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

$x_2 = \dfrac{-1+3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ainsi, $(E(m))$ admet une racine double seulement si $m \in \left\{-\sqrt{2}\ ;\ 0;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

3) $\sqrt{2}\,m^2+m-\sqrt{2} < 0 \iff m \in \left]-\sqrt{2}\ ;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$

$\sqrt{2}\,m^2+m-\sqrt{2} > 0 \iff m \in \left]-\infty;\ -\sqrt{2}\right[\bigcup\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ +\infty\right[$

On en déduit $\Delta'(m) < 0 \iff m \in \left]-\infty;\ -\sqrt{2}\right[\bigcup\left]0;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$

et $\Delta'(m) > 0 \iff m \in \left]-\sqrt{2}\ ;\ 0\right[\bigcup\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ +\infty\right[$

$(E(m))$ a alors :

-deux racines réelles pour $m \in \left]-\sqrt{2}\ ;\ 0\right[\bigcup\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ +\infty\right[$

-une racine réelle double pour $m \in \left\{-\sqrt{2}\ ;\ 0;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

-pas de racines réelles pour $m \in \left]-\infty;\ -\sqrt{2}\right[\bigcup\left]0;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$

4) Pour $(E(m))$ ayant deux racines réelles $x_1(m)$ et $x_2(m)$,

$S(m) = x_1(m)+x_2(m) = -\dfrac{2m}{(m^2-1)} = \dfrac{2m}{1-m^2}$

Sur l'ensemble des réels,

$1-m^2 < 0 \iff m^2 > 1 \iff m \in]-\infty;\ -1[\bigcup]1;\ +\infty[$

$1-m^2 > 0 \iff m^2 < 1 \iff m \in]-1;\ 1[$

On en déduit

$S(m) < 0 \iff m \in]-1;\ 0[\bigcup]1;\ +\infty[$

$S(m) > 0 \iff m \in]-\infty;\ -1[\bigcup]0;\ 1[$

5) Pour $(E(m))$ ayant deux racines réelles $x_1(m)$ et $x_2(m)$,

$P(m) = x_1(m)x_2(m) = \dfrac{-\sqrt{2}\,m}{(m^2-1)} = \dfrac{\sqrt{2}\,m}{1-m^2}$

Sur l'ensemble des réels, on a de même

$1-m^2 < 0 \iff m^2 > 1 \iff m \in]-\infty;\ -1[\bigcup]1;\ +\infty[$

$1-m^2 > 0 \iff m^2 < 1 \iff m \in]-1;\ 1[$

On en déduit

$P(m) < 0 \iff m \in]-1;\ 0[\bigcup]1;\ +\infty[$

$P(m) > 0 \iff m \in]-\infty;\ -1[\bigcup]0;\ 1[$

6) $(E(m))$ a deux racines réelles distinctes de même signe seulement si $P(m) = \dfrac{\sqrt{2}\,m}{1-m^2}$ est positif et $x_1(m)$ et $x_2(m)$ existent.

$(E(m))$ a alors deux racines distinctes de même signe pour $m \in \{]-\infty;\ -1[\bigcup]0;\ 1[\}\bigcap\left\{\left]-\sqrt{2}\ ;\ 0\right[\bigcup\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ +\infty\right[\right\}$

C'est-à-dire pour $m \in \left]-\sqrt{2}\ ;\ -1\right[\bigcup\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right[$.

7) $(E(m))$ admet deux racines réelles de signes opposés seulement si $\Delta'(m) > 0$ et $P(m) < 0$

c'est-à-dire si $m \in \left\{\left]-\sqrt{2}\ ;\ 0\right[\bigcup\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ +\infty\right[\right\}\bigcap\{]-1;\ 0[\bigcup]1;\ +\infty[\}$

On a alors $A = \{m \in R \mid P(m) < 0\}$

$x_1(m) < 0$ et $x_2(m) > 0$

$Max(|x_1(m)|,|x_2(m)|) = \dfrac{1}{2}(|x_1(m)|+|x_2(m)|+||x_1(m)|-|x_2(m)||)$

8) a) $S(m) = x_1(m)+x_2(m) = \dfrac{2m}{1-m^2}$

$P(m) = x_1(m)x_2(m) = \dfrac{\sqrt{2}\,m}{1-m^2}$

On a $x_1(m)$ et $x_2(m)$ solutions de

$X^2-S(m)X+P(m) = 0$

$\Delta(X) = S(m)^2-4P(m) = \dfrac{4m^2}{(1-m^2)^2}-\dfrac{4\sqrt{2}\,m}{1-m^2} = \dfrac{4m^2}{(1-m^2)^2}\left(1+\dfrac{(m^2+1)\sqrt{2}}{m}\right)$

Il est évident que $\Delta(X) > 0$

on a alors

$$x_1(m) = \frac{\dfrac{2m}{1-m^2}-\sqrt{\dfrac{4m^2}{(1-m^2)^2}\left(1+\dfrac{(m^2+1)\sqrt{2}}{m}\right)}}{2} = \frac{\dfrac{2m}{1-m^2}-\left|\dfrac{2m}{1-m^2}\right|\sqrt{1+\dfrac{(m^2+1)\sqrt{2}}{m}}}{2}$$

Or $\dfrac{2m}{1-m^2} < 0$ donc $-\left|\dfrac{2m}{1-m^2}\right| = \dfrac{2m}{1-m^2}$

Ainsi, $x_1(m) = \dfrac{m}{1-m^2}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{(m^2+1)\sqrt{2}}{m}}\right)$

De même, $x_2(m) = \dfrac{m}{1-m^2}\left(1-\sqrt{1+\dfrac{(m^2+1)\sqrt{2}}{m}}\right)$

b) $(E(m))$ admet 0 comme racine double $\iff \begin{cases} \Delta'(m) = 0 \\ \dfrac{2m}{1-m^2} = 0 \end{cases}$

Or, d'après 2), on sait que $\Delta'(m) = 0 \iff m \in \left\{-\sqrt{2},0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

Or $\dfrac{2m}{1-m^2} = 0 \iff 2m = 0 \iff m = 0$

La seule solution est $m = 0$

c) Cela correspond à $x_1(m) = 0$ et $x_2(m) \neq 0$.

$x_1(m) = 0 \iff \dfrac{m}{1-m^2}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{(m^2+1)\sqrt{2}}{m}}\right) = 0$

$m = 0$ n'est pas solution car $x_2(0) = 0$. On peut alors diviser par m.

$x_1(m) = 0 \iff 1+\sqrt{1+\dfrac{(m^2+1)\sqrt{2}}{m}} = 0$

$\iff \sqrt{1+\dfrac{(m^2+1)\sqrt{2}}{m}} = -1$

$\iff 1+\dfrac{(m^2+1)\sqrt{2}}{m} = 1$

$\iff \dfrac{(m^2+1)\sqrt{2}}{m} = 0$

$\iff m^2+1 = 0$

$\iff m^2 = -1$

On voit bien qu'il n'existe pas de réel m pour lequel $(E(m))$ admet pour racine 0 et un nombre réel strictement positif.

d) Cela correspond à $x_2(m) = 0$ et $x_1(m) \neq 0$.

$m = 0$ n'est pas solution car $x_1(0) = 0$. On peut alors diviser par m.

$x_2(m) = 0 \iff 1-\sqrt{1+\dfrac{(m^2+1)\sqrt{2}}{m}} = 0$

$\iff \sqrt{1+\dfrac{(m^2+1)\sqrt{2}}{m}} = 1$

$\iff 1+\dfrac{(m^2+1)\sqrt{2}}{m} = 1$

$\iff \dfrac{(m^2+1)\sqrt{2}}{m} = 0$

$\iff m^2+1 = 0$

$\iff m^2 = -1$

De même, on voit bien qu'il n'existe pas de réel m pour lequel $(E(m))$ admet pour racine 0 et un nombre réel strictement positif.