# Introduction

*« Dieu fit le nombre entier, le reste est l'œuvre de l'Homme. »*
Léopold Kronecker (1823-1891) [1]

Si l'origine empirique des nombres entiers naturels est incontestable, la volonté de perfectionner le raisonnement nécessite la formalisation du langage, et la clarification de ses fondements. C'est dans cette optique que les nombres entiers furent construits sur une axiomatique moderne [2].

Méthode axiomatique qui permit de nombreuses constructions abstraites de nombres très divers : nombres relatifs, décimaux, rationnels, réels, irrationnels, algébriques, transcendants, complexes, multicomplexes, hypercomplexes, quaternions, octonions, supernaturels, superréels, surréels, etc., cette liste est elle-même surréelle, et n'est pourtant pas exhaustive !

*« Nous ne savons pas ce que c'est qu'un nombre,*
*nous ne savons donc pas ce que nous sommes. »*
Alain Badiou (1937-) [3]

Avant toute chose, et surtout avant de donner un historique (succinct) sur le concept de nombre (et non sur les nombres), il faudrait justifier les choix qui ont été faits dans ce document :

- Les nombres entiers ($\mathbb{N}$) sont des nombres.
- Un ensemble plus simple que $\mathbb{N}$ dans lequel on peut faire des opérations est encore un ensemble de nombres (d'où les proto-nombres).
- Il est possible d'étendre un ensemble de nombres en lui imposant l'existence de nouveaux éléments possédant des propriétés algébriques bien choisies (d'où, $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, les méthodes de constructions, les infinitésimaux, etc.).
- Il est possible d'étendre un ensemble de nombres en lui imposant l'existence de nouveaux éléments possédant des propriétés, autres que algébriques (topologiques par exemple), bien choisis (d'où $\mathbb{R}$), par exemple.
- Les sous-ensembles des ensembles de nombres sont des ensembles de nombres (mais ils doivent avoir un intérêt algébrique particulier, donc nous ne parlerons pas dans ce document de l'ensemble des Nombres Premiers $\mathbb{P}$ (l'addition et la multiplication n'y sont même pas définies).
- La définition des nombres entiers dans ZF(C) est tellement générique qu'elle engendre de nouveaux ensembles de nombres (d'où les Ordinaux et les Cardinaux).

## Historique succinct du concept de Nombre

### Antiquité

*« Les nombres sont le plus haut degré de la connaissance.*
*Le nombre est la connaissance même. »*
Platon (-424 à -348)

§ 1 Thalès de Milet (-625 à -547) : un nombre est une collection d'unités.

§ 2 Pythagore (-580 à -495) : Tout est Nombre.
  (a) Les Pythagoriciens en général considèrent que le nombre est fait d'unités.
  (b) 1 n'est pas un nombre car la mesure n'est pas la chose mesurée (d'une certaine façon 1 est l'unité dans laquelle se mesurent les nombres).

§ 3 Platon (-424 à -348) : Les nombres existent dans le « Monde des idées » et n'ont rien de sensible ou de physique (monde imparfait).

§ 4 Eudoxe de Cnide (-400 à -350 environ) Un nombre est une multitude finie.

§ 5 Aristote (-384 à -322) Les nombres, sujets de l'arithmétique, sont très différents des grandeurs, sujets de la géométrie. Certaines grandeurs ont les propriétés des nombres, ce sont les grandeurs commensurables.
  (a) Un nombre est ce qui est divisible par deux ou par plus de parties aliquotes [4] (Métaphysique).
  (b) Un nombre est une multitude limitée.
  (c) 1 n'est pas un nombre (idée qui va perdurer[a], malgré Chrysippe, jusqu'à Simon Stevin).

1. Cité dans Eric Temple Bell, *Men of Mathematics*, Simon and Schuster, New York, 1986, p. 527.
2. Voir les Références.
3. A. Badiou, *Le Nombre et les Nombres*, Edition du Seuil, Paris, 1990.
4. Contenues un nombre entier de fois

(d) Est 1 ce qui est indivisible.

(e) La quantité est un nombre, quand elle se compte ; c'est une grandeur, quand elle se mesure. On entend par nombre ce qui peut se diviser en parties non continues et par grandeur, ce qui est divisible en parties qui tiennent les unes aux autres (continu *vs* discret).

§ 6 Euclide (-325 à -265) L'unité, par essence, ne peut être divisé (un homme coupé en deux n'est pas la moitié d'un homme, car il a perdu son essence).

(a) L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une.

(b) Un nombre est un assemblage composé d'unités.

§ 7 Babylone (-III$^{\text{ième}}$ siècle), apparition d'un symbole (d'un chiffre, et non d'un nombre) pour figurer le zéro dans la numération (avant, c'est un espace qui jouait ce rôle).

§ 8 Chrysippe de Soles (-279 à -206 environ) Chrysippe est surtout connu pour avoir affirmé que 1 est un nombre.

§ 9 Calendriers mayas (-50 environ), 0 apparaît, toujours comme chiffre.

§ 10 Modératus de Gadès (50 à 100 environ) Un nombre est un système d'unités, ou une progression du multiple à partir de l'unité et une régression qui se termine par l'unité.

§ 11 Nicomaque de Gérase (I$^{\text{ier}}$ ou II$^{\text{ième}}$ siècle)

(a) Le nombre est une multitude limitée.

(b) Le nombre est une combinaison d'unités (une série jaillissant de l'unité).

(c) Le nombre est un flux de quantité constitué d'unités.

(d) Distinction entre le nombre intelligible (concret, existant) qui est l'apanage du démiurge et le nombre épistémonique (abstrait, créé) qui est l'objet d'étude du mathématicien.

§ 12 Plotin (205 - 270) était un philosophe romain : C'est nous qui inventons par la pensée un nombre plus grand que tout nombre proposé, et l'infini naît grâce à cette opération que nous faisons sur les nombres.

### *Moyen-Âge*

« *J'ai prononcé la première lettre de l'alphabet,*
*et mon cœur m'a dit : "Maintenant, je sais.*
*Un est le premier chiffre du nombre qui ne finit pas".* »
Omar Khayyām (1048 - 1131) [5]

§ 1 Brahmagupta (598 – 668) était un mathématicien et astronome indien, il est le premier à utiliser le zéro comme un nombre, mais avec des erreurs comme de poser $0 = \dfrac{0}{0}$.

§ 2 Abū Kāmil, aussi connu sous le nom de Auoquamel (850 – 930) était un mathématicien égyptien, il est considéré comme le premier à accepter les irrationnels comme solutions d'équation.

§ 3 Al-Khawarizmi [6] (783 - 850) était un mathématicien et astronome perse, il a introduit le 0 venu des Indes dans les mathématiques arabes, et qui arrivera en Italie après être passé par l'Espagne. C'est d'ailleurs le mot *sifr* (qui veut dire vide, et qui désignait le 0) qui donna le mot *chiffre*.

§ 4 Abraham ben Meir Ibn Ezra (1089 - 1164) était un philosophe, mathématicien et astronome andalou (on lui doit l'importation des idées indiennes sur l'arithmétique en Occident) : il a défendu l'idée que 1 est un nombre.

§ 5 Leonardo Fibonacci (1175 - 1250) était un mathématicien italien : il introduisit le 0 comme nombre, et même, il accepte des valeurs négatives dans les calculs mais pas comme un résultat, qui est alors considéré comme non valable.

5. Les Rubayat, ouvrage de poésie.
6. C'est à partir du nom de Al-Khawarizmi que fut forgé le mot *algorithme*.

### *Epoque moderne*

*« Il ne faut pas se faire illusion en s'imaginant que les idées des nombres séparés de leurs signes soient quelque chose de clair et de déterminé. »*
Étienne Bonnot de Condillac (1715 - 1780) [7].

§ 1 Simon Stevin (1548 à 1620), est un mathématicien flamand qui a réconcilié nombres et grandeurs (en faisant disparaître l'opposition entre discret et continu), pour lui tous les nombres (que nous appellerions réels) ont droit de cité.

(a) 1 est un nombre (avec l'argument suivant : « Si de 3 on ne soustrait aucun nombre, 3 reste inchangé ; si de 3 on soustrait 1, 3 est changé ; donc 1 ne peut pas ne pas être un nombre. »

(b) Un nombre est cela par quoi s'explique la quantité de chacune chose.

§ 2 John Locke (1632 - 1704) était un philosophe anglais : Le nombre est une propriété première des objets.

§ 3 Isaac Newton (1643 - 1727) était un philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien anglais : Par le nombre nous comprenons pas tellement une multitude d'unités, comme rapport soustrait de n'importe quelle quantité à une autre quantité de la même sorte, que nous prenons pour l'unité.

§ 4 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) était un philosophe, mathématicien et logicien allemand : Un nombre est alors le résultat de l'action mentale qui consiste à rassembler une pluralité sous une unité.

### *Epoque contemporaine*

*« Ce que tu vois dans le cosmos n'est que le reflet des dieux,*
*Parmi les Olympiens trône le Nombre éternel. »*
Charles Gustave Jacob Jacobi (1804 - 1851) [8]

§ 1 Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) est un mathématicien, astronome et physicien allemand : Le nombre est une production de notre esprit seul.

§ 2 John Stuart Mill (1806 - 1873) était un philosophe, logicien et économiste britannique : Tous les nombres doivent être nombres de quelque chose, un être tel qu'un nombre abstrait n'a aucune existence

§ 3 Leopold Kronecker (1823 - 1891) est un mathématicien et logicien allemand.

(a) Dieu créa les nombres, le reste est l'œuvre de l'homme.

(b) Le concept de *vrai nombre* doit être strictement limité aux nombres entiers positifs. Les négatifs et les fractions ont néanmoins droit de cité en arithmétique, contrairement aux nombres irrationnels.

(c) Le point de départ naturel pour le développement du concept de nombre, je le trouve dans les nombres ordinaux.

(d) Le concept de nombre est équivalent au concept de « Quantité des objets ».

§ 4 Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 - 1916) est un mathématicien allemand, dont la deuxième citation, ci-dessous, est très parlante (mis en gras par nous-mêmes) :

(a) Les nombres sont de libres créations de l'esprit humain, ils servent comme moyen permettant de saisir avec plus de facilité et de précision la diversité des choses.

(b) Par corps nous entendons tout système infini de nombres réels ou complexes en lui-même si fermé et complet que l'addition, la soustraction, la multiplication et la division de toute paire de nombres lui appartenant produit toujours un nombre appartenant également au système. Le plus petit corps est formé par tous les nombres rationnels, le plus grand par **tous les nombres**.

§ 5 Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor (1845 – 1918) est un mathématicien allemand qui est, bien sûr, à l'origine de la définition et, subséquemment, de la distinction entre ordinaux et cardinaux, deux notions purement abstraites.

7. Art de penser, I, 6.
8. Pastiche d'un poème de Schiller.

§ 6 Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 - 1925), était un mathématicien, logicien et philosophe allemand :

(a) Nous connaissons les nombres par leur pratique, mais nous ignorons de quoi ils sont faits.

(b) Le concept de nombre ne découle du concept de l'unité.

(c) Le nombre 2, par exemple est le concept émergent de la classe des collections de deux objets.

(d) Un nombre n'est pas une propriété des objets, un nombre est lui-même un objet (en opposition totale avec Locke, cf. supra).

§ 7 Bertrand Arthur William Russell (1872 - 1970) était un mathématicien, en particulier logicien, mais aussi philosophe et épistémologue britannique : Les nombres ne réfèrent à aucune réalité, mais n'existe que par leur définition.

§ 8 Edmund Gustav Albrecht Husserl (1859-1938) philosophe, logicien et mathématicien allemand (fondateur de la phénoménologie) : Les nombres ne sont pas des objets naturels, mais le résultat d'une abstraction.

*Références*

1. A. Badiou, *Le Nombre et les nombres*, Éditions du Seuil, Paris, 1990.
2. L. Kronecker, présenté par J. Boniface, *Sur le concept de nombre*, Journal de Crelle, 1887.
3. Joongol Kim, *A philosophical inquiry into the concept of number*, University of Notre Dame, Indiana, 2004.
4. D. W. Hein, *The Axiomatic Method*, Southern Utah University, 16 pages, 2014.
5. L. Henkin, P. Suppes & A. Tarski , *The Axiomatic Method, with special reference to Geometry and Physics*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 506 pages, 1959.