

Approche conjecture de Syracuse:

Suite de Syracuse:

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

Pour faciliter la formule je remplace la suite de Syracuse par

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ \frac{3u_n + 1}{2} & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

J'ai décidé d'approcher la conjecture de Syracuse différemment en fait au lieu de chercher si un nombre impair autre que 1 commencer un cycle, je cherche quel est le résultat d'une équation de Syracuse. Qu'est ce que j'entend par équation de Syracuse ?

Par exemple:

$$x = \frac{3x + 1}{2 \times 2}$$

Dans notre exemple $x = 1$, donc 1 est solution de cette équation de Syracuse, comme x est un nombre entier alors 1 appartient à un cycle (1,4,2,1,4,2...). Cette équation de Syracuse correspond à la valeur multipliée par 3 + 1 diviser par 2 et que l'on re-divise par 2 qui donne cette même valeur, c'est à dire 1.

Pour faciliter c'est équation, je vais la transformer sous forme de liste par exemple [1,0,0,1], 1 correspond à multiplier par 3 + 1 puis diviser par 2 et 0 diviser par 2 donc l'équation associé à cette liste serait :

$$x = \frac{3 \frac{3x + 1}{2 \times 2 \times 2} + 1}{2}$$

x vaut donc après résolution 11/7

Lorsque que nous résolvons nos équations il est toujours important de garder x sous forme a/b et de ne jamais simplifier entre a et b même si il y a facteur commun.

Une fois les bases posées, je me suis posé la question suivante: si nous rajoutons à notre liste un 1 ou un 0, pouvons-nous obtenir le résultat de la nouvelle équation en fonction du résultat de la première ?

Exemple:

$$[1,0,0,1] \rightarrow 11/7$$

La solution [1,0,0,1,0] dépend-t-elle de 11/7 ? Même question pour [1,0,0,1,1]
La réponse est oui.

Si on ajoute un 1 à une liste donnant a/b alors le résultat de la nouvelle liste est:

v_2 correspond au nombre de fois où l'on divise par 2

v_3 correspond au nombre de fois où l'on multiplie par 3 et on ajoute 1

$$\frac{3(a+b)}{2^{v_2}-3^{v_3}} - 1$$

Si on ajoute un 0 à une liste donnant a/b alors le résultat de la nouvelle liste est:

v_2 correspond au nombre de fois où l'on divise par 2

v_3 correspond au nombre de fois où l'on multiplie par 3 et on ajoute 1

$$\frac{a}{2^{v_2}-3^{v_3}}$$

Par exemple [1,0,0,1] → 11/7 donc

$$[1,0,0,1,1] \rightarrow \frac{3(11+7)}{2^5-3^3} - 1 = \frac{49}{5}$$

À partir de ces 2 règles on peut commencer à savoir à quoi ressemble un nombre se trouvant dans un cycle de la suite de Syracuse.

Prenons un nombre impair (x) suivi de 2 nombres pairs (il y en a forcément un dans un cycle). On sait que notre liste commence par [1,0,...] comme on sait que [1,0] → 1/1, on en déduit après calcul et simplification que :

v_2 correspond au nombre de fois où l'on divise par 2

v_3 correspond au nombre de fois où l'on multiplie par 3 et l'on ajoute 1

$$\forall n, k \in \mathbb{N}^2$$

$$k_0 \geq 2$$

$$j_{v_3-1} \leq v_2$$

$$j_n = k_n + 1$$

$$k_{n+1} \geq k_n + 1$$

$$x = \frac{3^{v_3-1}(1+2^{k_0}) + 3^{v_3-2}(2^{k_1}-2^{j_0}) + \dots + 3^{v_3-(v_3-1)}(2^{k_{v_3-1}}-2^{j_{v_3-2}}) - 2^{j_{v_3-1}}}{2^{v_2}-3^{v_3}}$$

Simplification:

v_2 correspond au nombre de fois où l'on divise par 2

v_3 correspond au nombre de fois où l'on multiplie par 3 et l'on ajoute 1

$$\forall n, k \in \mathbb{N}^2$$

$$k_0 \geq 2$$

$$k_{v_3} < v_2$$

$$k_{n+1} \geq k_n + 1$$

$$x = \frac{3^{v_3-1} + 3^{v_3-2}2^{k_0} + 3^{v_3-3}2^{k_1} + \dots + 3^{v_3-(v_3-1)}2^{k_{v_3-3}} + 2^{k_{v_3-2}}}{2^{v_2} - 3^{v_3}}$$

$$a = 3^{v_3-1} + 3^{v_3-2}2^{k_0} + \dots + 2^{k_{v_3-2}}$$

$$a' = a - 3^{v_3-1}$$

$$x(2^{v_2} - 3^{v_3}) = a$$

$$x(2^{v_2} - 3^{v_3-1} \times 4 + 3^{v_3-1}) = a' + 3^{v_3-1}$$

$$2^{v_2}x - 3^{v_3}4x + 3^{v_3-1}(x-1) = a'$$

$$\frac{a' - 2^{v_2}x + 3^{v_3-1}4x}{x-1} = 3^{v_3-1}$$

$$3^{v_3-1} \left(\frac{4x + \frac{a' - 2^{v_2}x}{3^{v_3-1}}}{x-1} \right) = 3^{v_3-1}$$

$$\frac{4x + \frac{a' - 2^{v_2}x}{3^{v_3-1}}}{x-1} = 1$$

$$f(x) = \frac{a' - 2^{v_2}x}{3^{v_3-1}}$$

$$\frac{4x + f(x)}{x-1} = 1$$

$$\frac{(4x + f(x))^2}{(x-1)^2} = 1^2$$

$$\frac{16x^2 + 8x \times f(x) + f(x)^2}{(x-1)^2} = 1$$

$$\frac{x(16x + 8 \times f(x)) + f(x)^2}{(x-1)^2} = 1$$

$$\frac{4x + f(x)}{x-1} = 1$$