

Devoir 7

Ce devoir est à réaliser sous forme numérique :
connectez-vous à votre site de formation www.cned.fr > espace inscrit
et suivez nos conseils pratiques pour déposer votre devoir et le faire corriger par internet.

IMPORTANT

Veillez réaliser ce devoir après avoir étudié **la séquence 13**.

« La réalisation de vos devoirs est un travail personnel permettant d'évaluer vos acquisitions et de construire votre projet d'orientation. Sauf consignes contraires, il est obligatoire de les réaliser dans les conditions de l'examen, c'est-à-dire en temps limité, sans recopier des contenus issus de supports extérieurs au sujet (internet, cours du CNED, manuels scolaires...). Le cas échéant, si vous avez besoin de vous référer à un passage issu d'un support extérieur, mettez-le entre guillemets et citez votre source. Tout travail non personnel sera sanctionné.»

Temps de réalisation du devoir : 2h00

Attention ! Ce devoir comporte une partie orale asynchrone (Exercice 3, question 2.b).

Exercice 1 (7 points):

On lance deux dés de façon indépendante et aléatoire et on note X la variable aléatoire égale à la somme des résultats obtenus sur leur face supérieure.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

- Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type σ de cette variable aléatoire .
- a. Calculer . $P(|X-7|\geq\sigma)$
b. Quelle majoration obtient-on avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour $P(|X-7|\geq\sigma)$?
- a. Calculer $P(X\in[7-2\sigma;7+2\sigma])$

b. Quelle minoration obtient-on avec Bienaymé-Tchebychev pour $P(X \in [7-2\sigma; 7+2\sigma])$? Comparer ce résultat avec celui de la question 3.a.

Questions guidantes

1. Le calcul de la variance nécessite le calcul de l'espérance. Bien vérifier l'espérance avec la calculatrice en mode stats, puis calculer la variance et vérifier la variance avec

la calculatrice. $p = \frac{1}{6}$

2. a. Bien préciser les valeurs de X pour lesquelles

3.b. Pour obtenir une minoration, on écrit l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev puis on passe à l'événement contraire.

Conseils / Méthodologie

1. Prendre un arrondi à deux décimales de l'écart-type pour savoir quels entiers sont contenus dans les intervalles pour les questions suivantes.

2.a. Représenter les valeurs de X sur une droite repérée si nécessaire.

Exercice 2 (7 points)

En France, l'Agence de Santé annonce qu'un nouveau virus touche 20 % de la population.

1. La fonction Python infecte() permet de compter le nombre de personnes atteintes dans un échantillon de taille 80 en simulant de façon aléatoire la contamination de l'échantillon par le virus.

a. Compléter l'algorithme aux lignes 6, 8 et 10.

b. En l'exécutant plusieurs fois, on obtient :

15 ; 20 ; 22 ; 15 ; 15 ; 9 ; 18 ; 19 ; 17 ; 13

Calculer la moyenne de personnes infectées sur ces 10 échantillons de taille 80.

2. Soit X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la personne n°i de l'échantillon est infectée et 0 sinon. la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes infectées dans un échantillon de taille 80.

a. Exprimer S_{80} en fonction des X_i . Quelle loi suit S_{80} ?

b. Calculer son espérance et sa variance.

```

1 from lycee import *
2 from numpy import *
3 from random import *
4 def infecte():
5     n=0
6     for i in range(...):
7         a=randint(1,5)
8         if a==...:
9             n=n+1
10    return(...)

```

c. Majorer la probabilité

$P(|S_{80}-16|\geq\sqrt{80})$ à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

3. a. A l'aide du tableau ci-contre, calculer la probabilité $P(|S_{80}-16|\geq\sqrt{80})$ en arrondissant à trois décimales.

k	$P(S_{80}\leq k)$	k	$P(S_{80}\leq k)$
7	0,00527249362	17	0,67075072629
8	0,01308751817	18	0,76207988219
9	0,02871756729	19	0,83658524623
10	0,05646090446	20	0,8933955863
11	0,10059803178	21	0,93397440064
12	0,1640451523	22	0,96118065116
13	0,24701446376	23	0,97833241779
14	0,34628131853	24	0,98851627923
15	0,45547485878	25	0,99421924164
16	0,5663745481	26	0,99723523137
		27	0,99874322624

b. Comparer le résultat obtenu en 3.a. et celui obtenu en 2.c

Questions guidantes

2. a. b. Ecrire \bar{X} en fonction des X_i

2.c. Ecrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev puis remplacer les nombres par leur valeur.

3.a. $P(|X-c|\geq r)=1-P(X\in]c-r;c+r[)$

Conseils / Méthodologie

2.a. La formule du cours est à connaître. Sinon, il faut utiliser l'additivité de la variance pour les variables aléatoires indépendantes.

3.a. $P(X\in]c-r;c+r[)=P(X\leq c+r)-P(X\leq c-r)$

Exercice 3 (6points)

Un chef de la sécurité d'un casino a des doutes sur un joueur qui encaisse de gros gains à la table d'un jeu de dé : le craps. A ce jeu, il faut obtenir des scores précis en faisant la somme des faces supérieures des deux dés. Le chef de la sécurité se demande s'il peut parvenir à montrer que le dé est pipé en confisquant le dé en faisant des essais.

Combien de lancers d'un dé doit-il effectuer pour pouvoir affirmer avec une précision de 0,01 et un risque d'erreur inférieur à 5 % que la fréquence d'apparition du 4 est normale ?

Pour un entier $1\leq i\leq n$, la variable aléatoire X_i prend comme valeur 1 si on obtient 4 au i-ème lancer et 0 sinon. Soit M_n la moyenne empirique de l'échantillon X_1, X_2, \dots, X_n de taille n.

1. a. Quelle loi suivent les variables aléatoires X_i ?

b. Donner l'espérance et la variance des X_i .

2.a. Montrer que $E(M_n) = \frac{1}{6}$

Attention ! Question orale

b. **Question orale** : Montrer que l'inégalité de concentration nous permet d'obtenir

$$P\left(\left|M_n - \frac{1}{6}\right| \geq x\right) \leq \frac{5}{36nx^2} \text{ puis d'établir que } \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|M_n - \frac{1}{6}\right| \geq x\right) \rightarrow 0 . \text{ Comment}$$

s'appelle ce résultat ?

3. Quelle taille d'échantillon est nécessaire pour pouvoir affirmer avec une précision de 0,02 et un risque de 0,05 que le dé est normal ?

Questions guidantes

1.b . C'est une question de cours. La démonstration est tout de même à connaître car elle est très rapide.

2.a. Utiliser la linéarité de l'espérance.

2. b. Donner l'inégalité de B-T comme elle est écrite dans le cours avant de remplacer la variance par sa valeur. Ensuite, il faut passer à la limite dans l'inégalité obtenue en

2.b. lorsque n tend vers l'infini.

Conseils / Méthodologie

3. On écrit l'inégalité de Tchebychev avec la précision demandée puis on majore le membre de droite de l'inégalité par le risque.