UNIVERSITÉ LAVAL

GLO-4001/7021
INTRODUCTION À LA ROBOTIQUE MOBILE

Probabilités

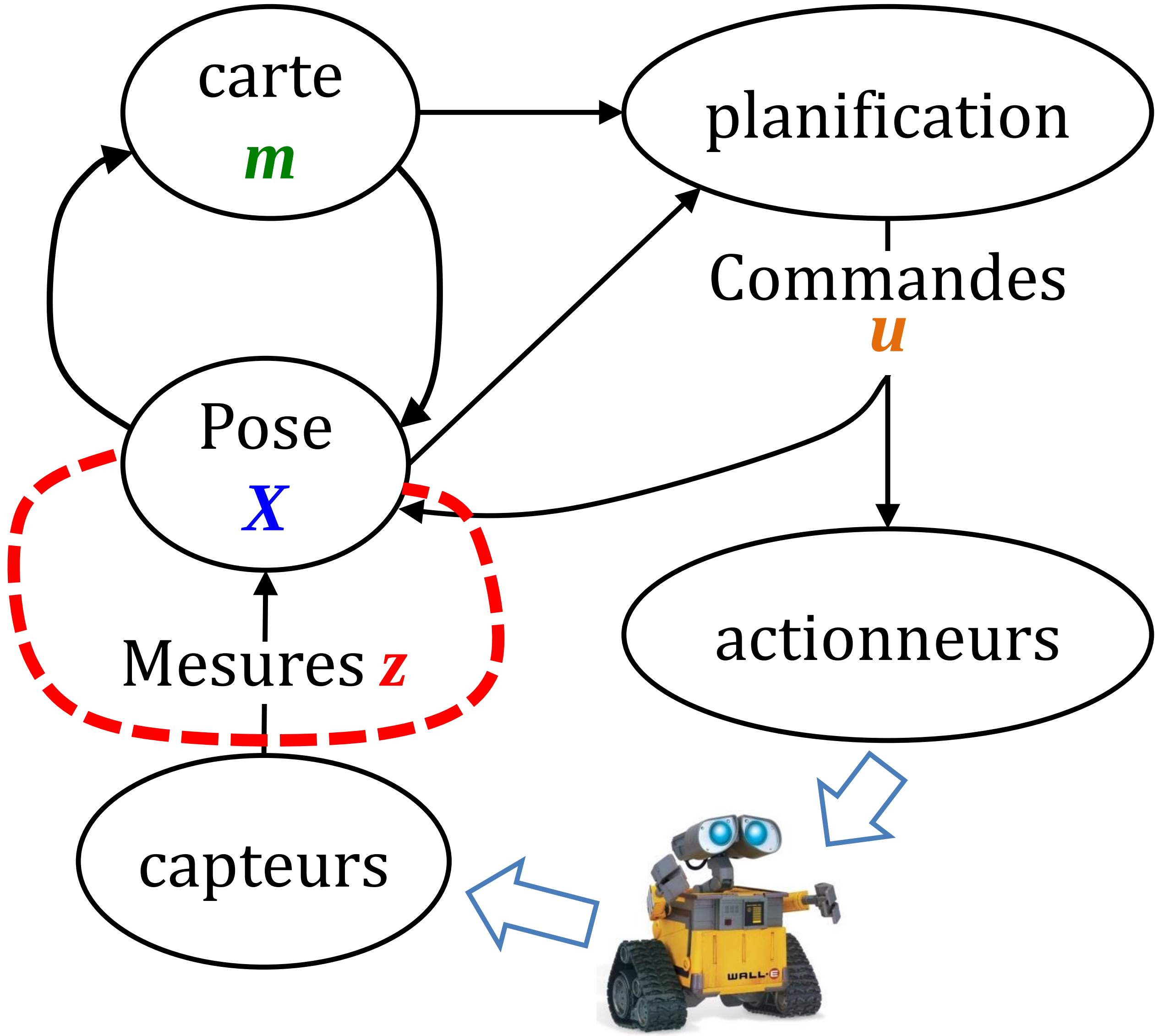
(Automne 2019)

Philippe Giguère

Pourquoi probabilités en robotique?

- Pour tenir compte de l'incertitude/bruit liées
  - aux mesures des capteurs
  - aux déplacements du robot
  - méconnaissance de l'environnement
- Utiliser des **variables aléatoires** pour
  - les mesures (z)
  - les actions (u)
  - l'état du robot (X ou x)

Feuille de route



Université Laval

Variable aléatoire

- Variable :
  - qui prend des valeurs au hasard
  - définies dans un **espace discret** ou **continu**
  - selon des lois de probabilité.
- Commençons par **espace discret**

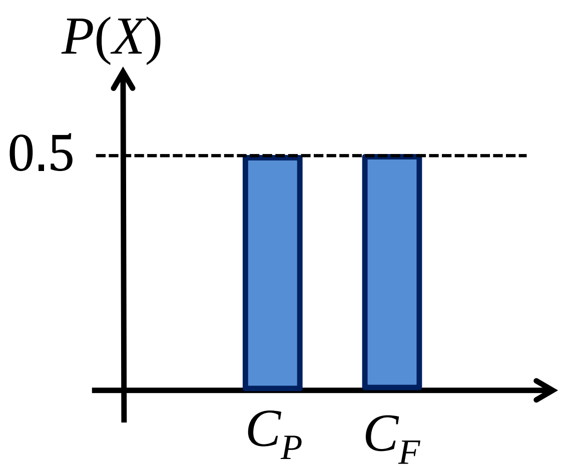
$$\text{variable } X \in \{C_P, C_F\} : \text{ pièce de monnaie}$$

$$D \in \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\} : \text{ dé à 6 faces}$$

Variable aléatoire

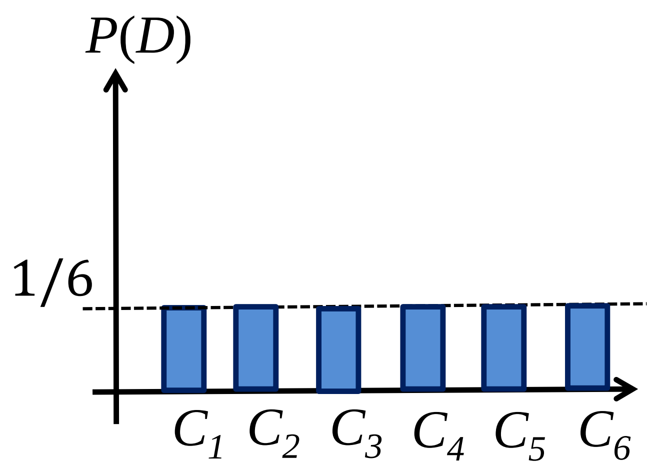
- On attribue une probabilité à chacun des **événements**

$$P(X = C_P) = P(X = C_F) = 0.5$$

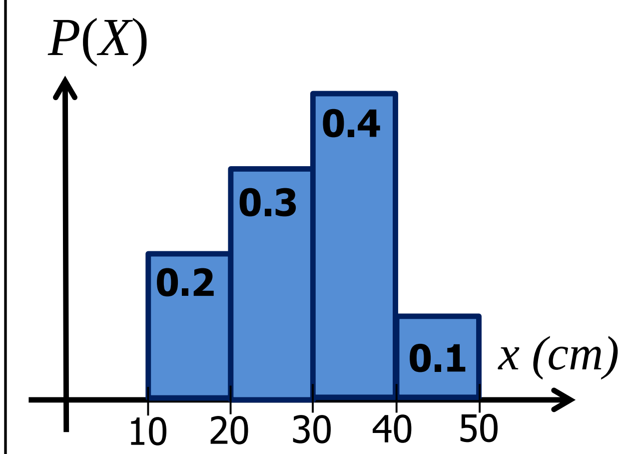


pièce de monnaie

$$P(D = C_1) = \frac{1}{6}, \quad P(D = C_2) = \frac{1}{6}, \quad \text{etc.}$$



dé à six faces



intervalle sur position du robot

Propriétés des probabilités

- Probabilités sont toujours positives

$$\boxed{P(X = C_i) \geq 0}$$

- La somme de la probabilité de tous les événements possibles est 1

$$\boxed{P(X = C_1) + P(X = C_2) + ... = 1}$$

Variable aléatoire continue

- L'espace de valeur est souvent **continu**
  - grandeur d'une personne
  - voltage du capteur pour une position ***x*** du robot
  - estimé de la position ***x*** du robot

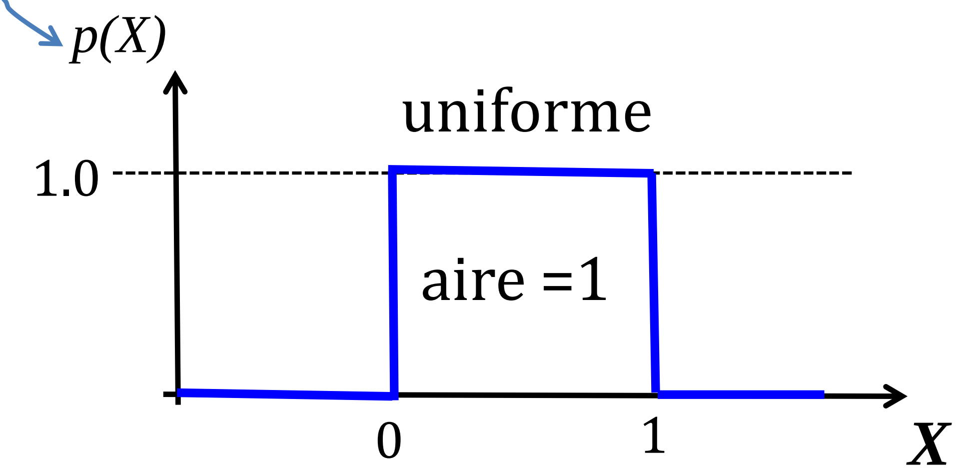
- Travaille surtout en **continu** en robotique mobile

Variable aléatoire continue

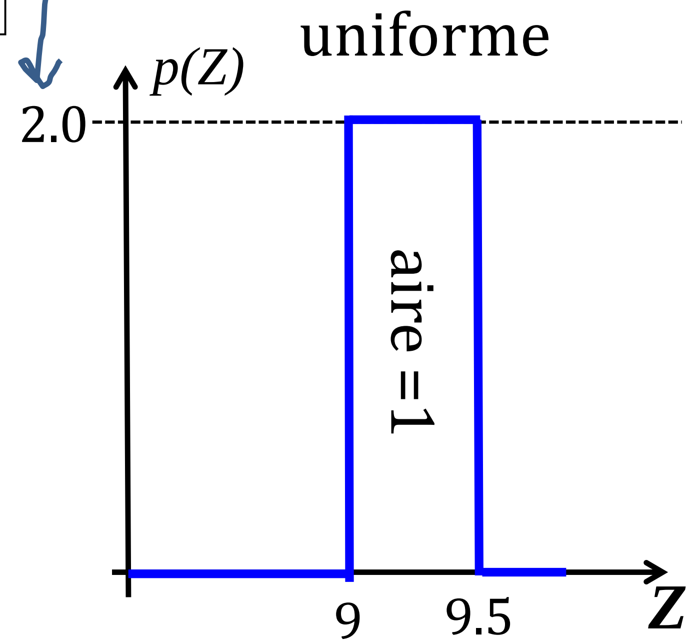
- Associe une **distribution** (fonction) des probabilités pour X
- densité $p(X)$
- Aire totale = 1

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} p(X)\,dX = 1}$$

lettre minuscule



pdf* peut dépasser 1



**pdf = probability density function*

Distribution Gaussienne 1 dimension

- Entièrement décrite par 2 paramètres : μ et σ.

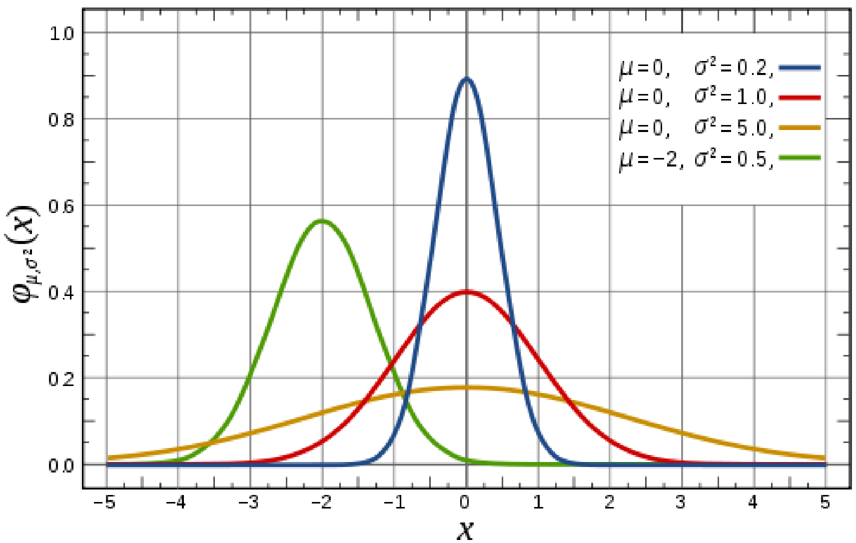
μ : moyenne $\quad$ e = 2,7182818284590...

σ : écart-type

constante de normalisation
(intégrale == 1)

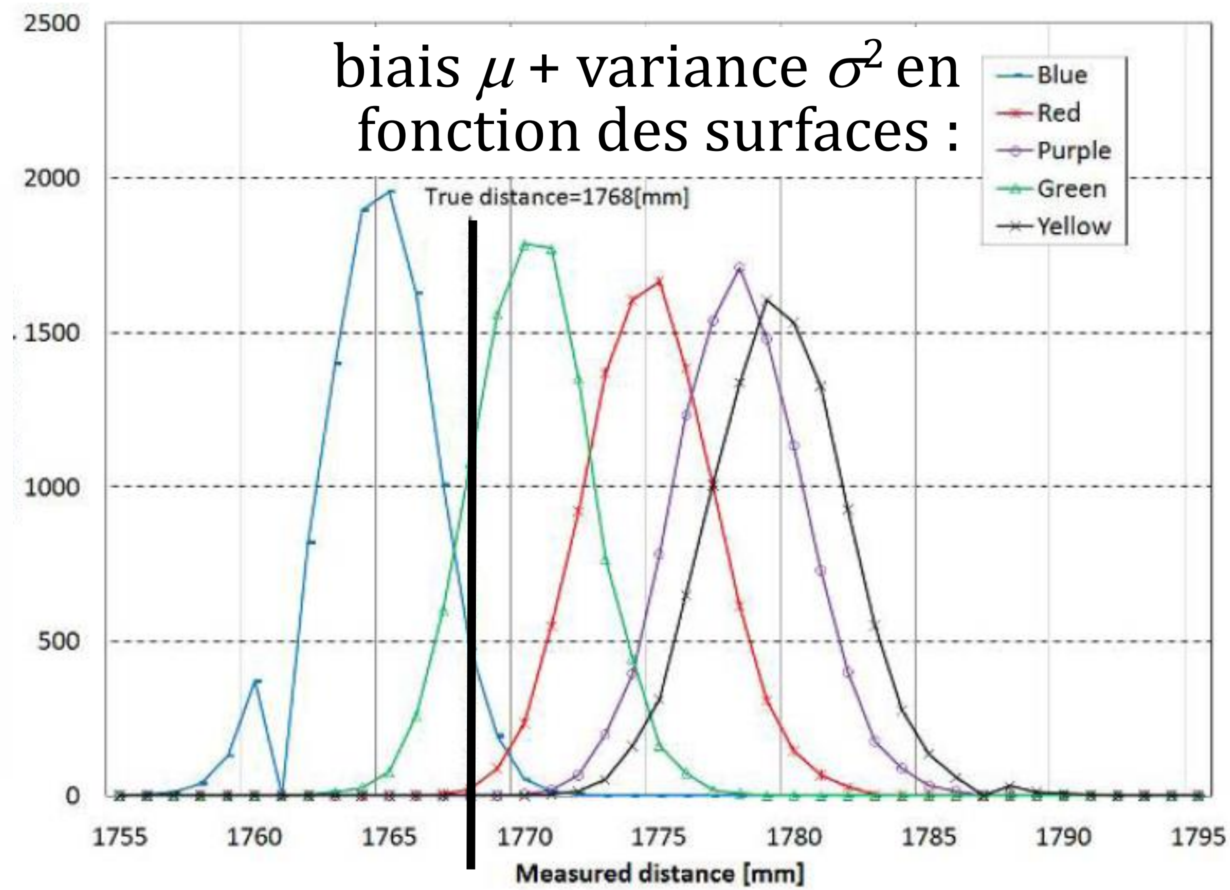
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

(autre nom : distribution normale)



Exemple en robotique

- Décrit bien le bruit sur un grand nombre de capteur



Characterization of the Hokuyo URG-04LX Laser Rangefinder for Mobile Robot Obstacle Negotiation

Yoichi Okubo*, Cang Ye**, and Johann Borenstein*

UNIVERSITÉ LAVAL

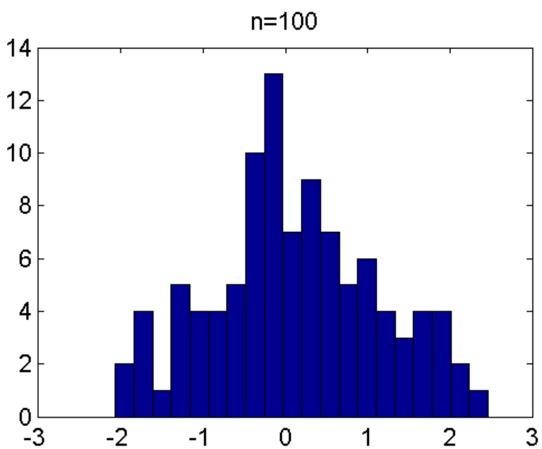
Exemple avec matlab

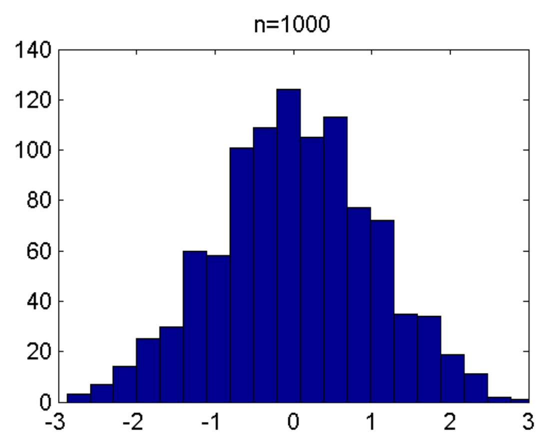
- **`randn`**
- **`hist`**

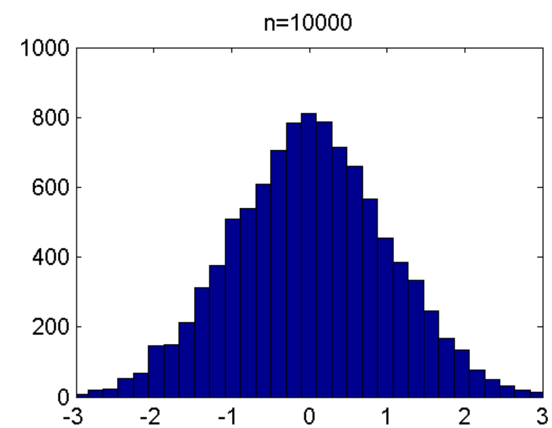
faire bien attention!!! la commande **`rand`** existe

```
n = 10000;
x = randn(1,n); % aléatoire Gaussienne
hist(x,40)      % 40 = nombre de "bin"
xlim([-3 3]);   % limite en abscisse
title(sprintf('n=%d',n));
```

Équivalent en python : **`numpy.random.randn`**



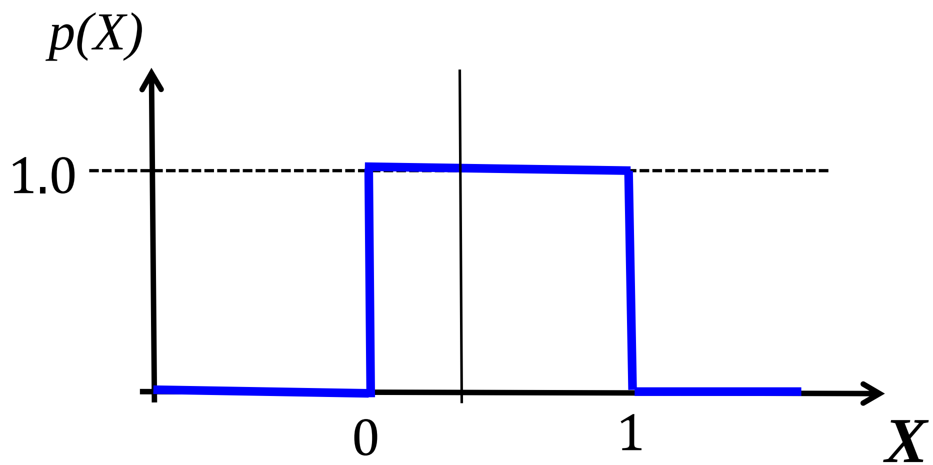




plus n est grand, plus on s'approche de la distribution véritable

Variable aléatoire continue

- Quelle est la probabilité d'avoir X=0.3449242?



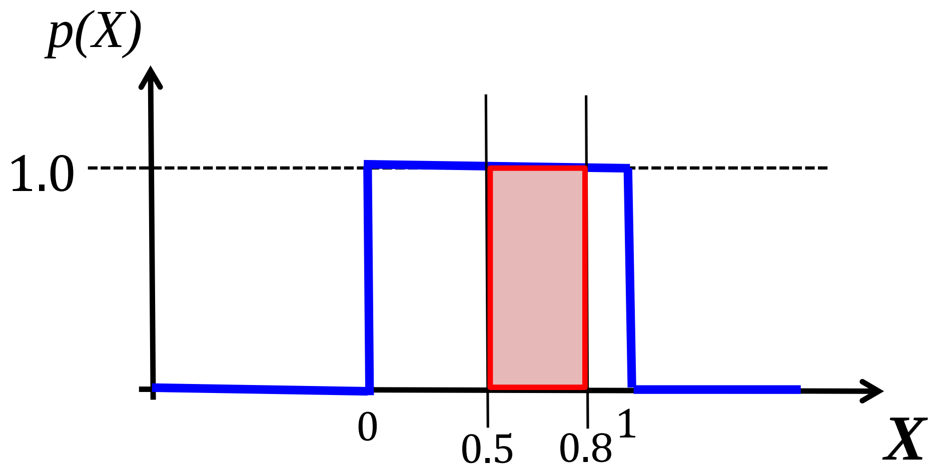
$$P(X{=}0.3449242) = 0$$

(il y a une infinité de nombres réels entre 0 et 1 : ensemble non dénombrable)

Variable aléatoire continue

- Probabilité : aire sous la courbe $\boldsymbol{p(X)}$ entre deux bornes

$$P(0.5 \leq X \leq 0.8) = \mathbf{0.3}$$

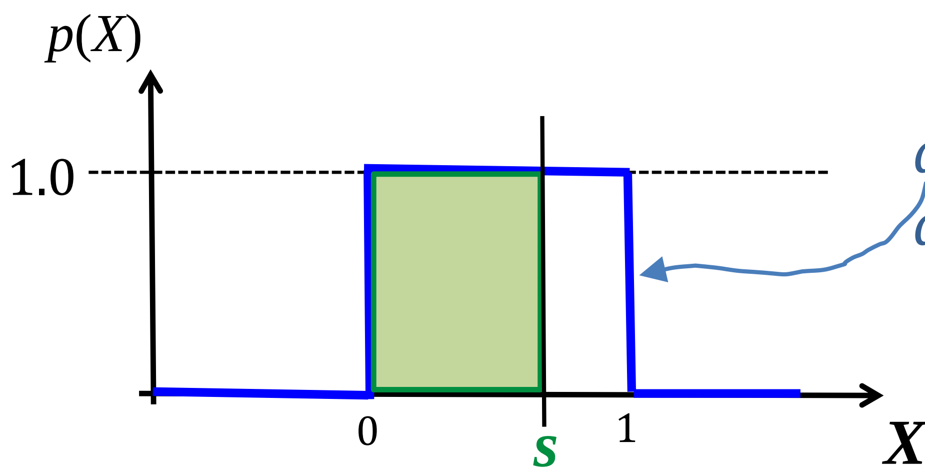


Générer un évènement au hasard

- Comment générer dans un programme un évènement avec probabilité ***s***?

génère un nombre entre 0.0 et 1.0, distribution uniforme

```
if (rand()< s)
   l'événement se produit
else
   l'événement ne se produit pas
end
```



distribution uniforme de **`rand()`**

Distribution pour plus d'une variable $P(A,B)$

- Probabilité que deux événements se produisent

$$P(x, y) = P(X = x \text{ et } Y = y)$$

- Appelé probabilité **jointe**

Modèle de la météo au Québec

- 2 variables aléatoires discrètes :
  - Température $T=\{C,F\}$
  - Météo $M = \{N, PN\}$ (neige ou pas)

$P(C,N) = 0.001$

	C	F
N	0.001	0.2
PN	0.399	0.4

Table des probabilités jointes (discrets)

- La taille dépend du nombre
  - de variables
  - d'états par variable
- Cas simple :
  - x_i est variable binaire Vrai/Faux
  - n variables jointes : $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
  - # d'entrées table = $O(2^n)$ → # exponentiel ☹
  - # d'exemples exponentiel pour « tuner » la table ☹
- Raisonnement similaire pour continu
- On cherche donc à les éviter

Indépendance

- Si A et B sont des événements indépendants, alors

note: $P(A \cap B)$ est la même chose

$$\boxed{\underbrace{P(A,B)}_{\text{la probabilité que A et B se produisent}} = \underbrace{P(A)P(B)}_{\text{... est égale à la probabilité que A se produise, multiplié par la probabilité que B se produise.}}}$$

la probabilité que A et B se produisent

... est égale à la probabilité que A se produise, multiplié par la probabilité que B se produise.

- Simplifie les maths ☺
- ***User*** et ***abuser*** en robotique mobile
  - pour avoir un résultat calculable en un temps raisonnable!

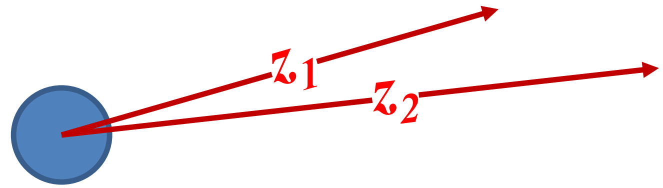
UNIVERSITÉ LAVAL

Exemple d'indépendance « abusée »

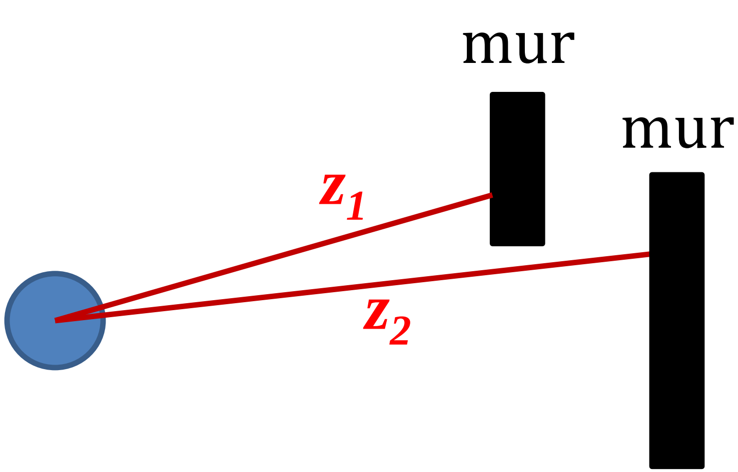
- Deux mesures distances z_1 et z_2 avec LiDAR

$$P(z_1, z_2) = P(z_1)P(z_2)$$

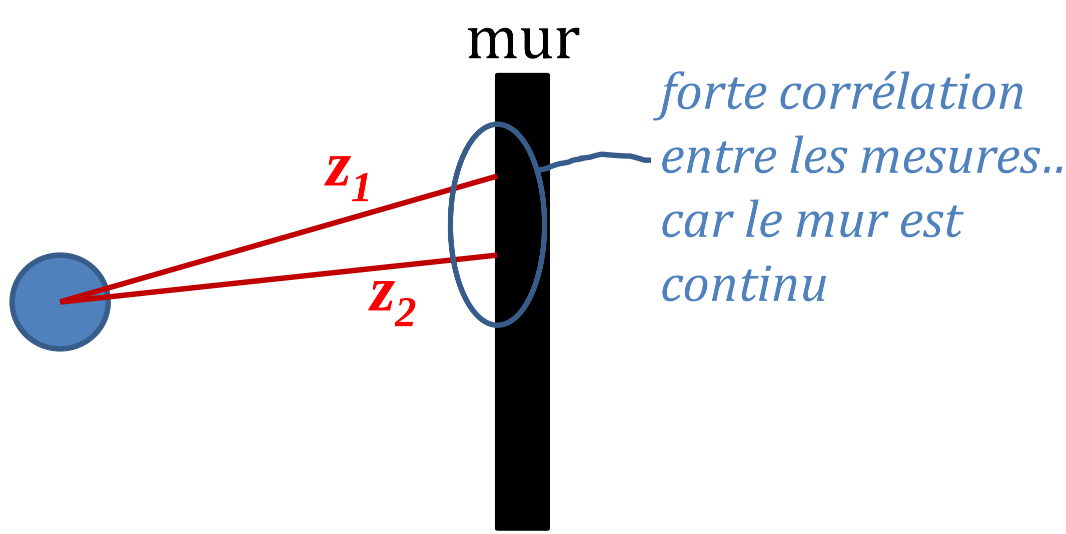
indépendants



- Rarement vrai…



indépendant : oui



indépendant : pas tout à fait…

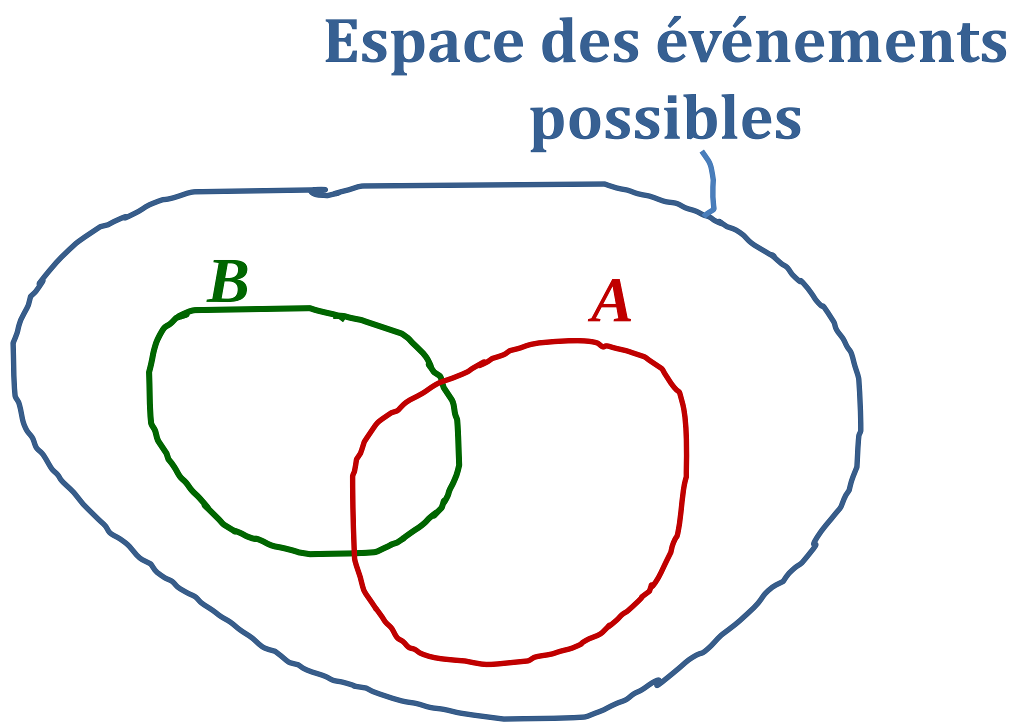
Probabilités conditionnelles $P(A|B)$

- *Parfois*, une variable aléatoire nous renseigne sur une autre
- Exemple météo :
  - si je vous dis qu'il fait chaud, vous savez fort probablement qu'il ne neige pas
  - si je vous dis qu'il neige, alors vous pouvez inférer qu'il fait probablement froid
- S'il y a dépendance entre A et B :
  - signifie que de l'information sur A nous donne (un peu? beaucoup?) de l'information sur B, et vice-versa (bon!)
  - complexifie les calculs (pas bon!)

Probabilités conditionnelles $P(A|B)$

- Pour décrire la probabilité que l'événement A se produise, si l'événement B s'est déjà produit.

$$P(A|B)$$

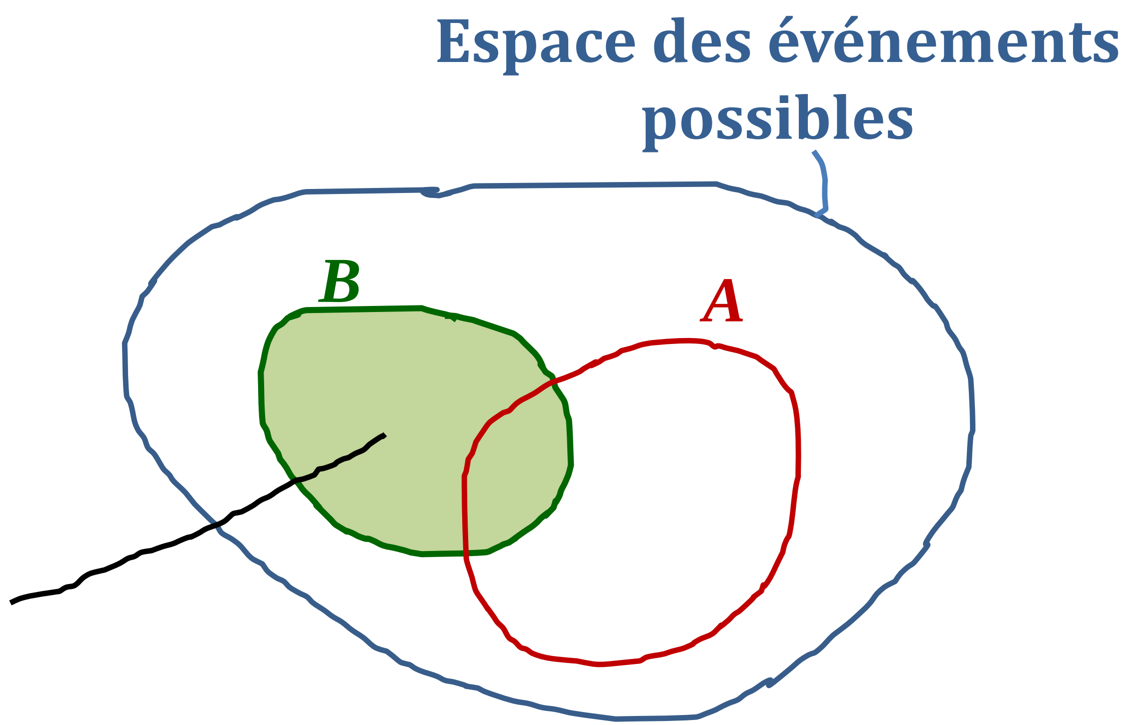


probabilité est proportionnelle à l'aire

Probabilités conditionnelles

- Pour décrire la probabilité que l'événement A se produise, si l'événement B s'est déjà produit.

$$P(A|B)$$



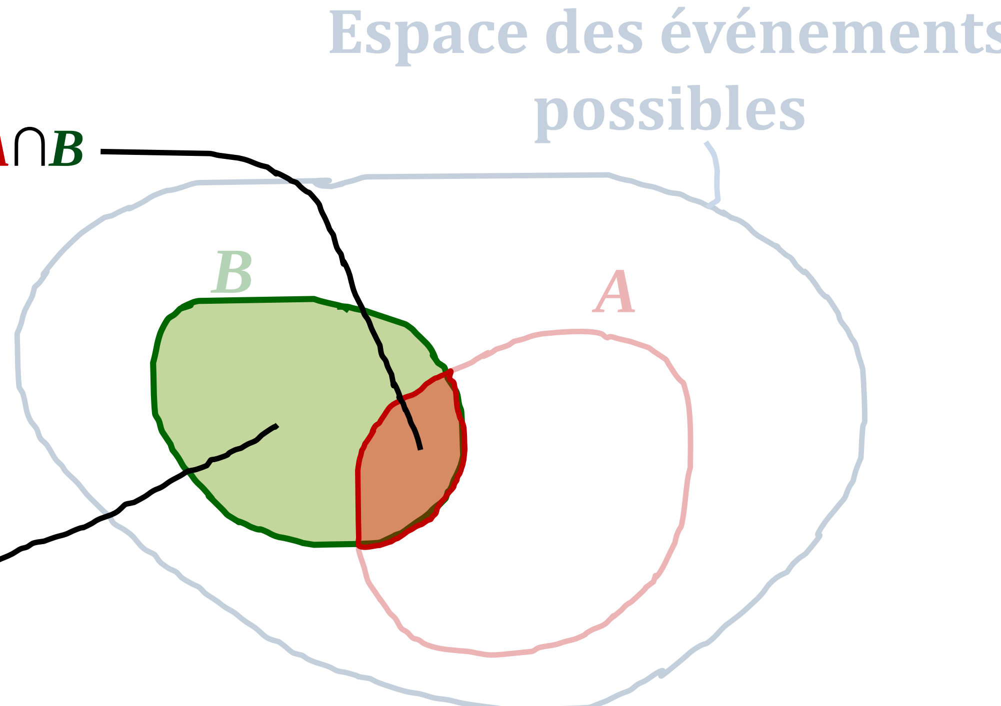
probabilité est proportionnelle à l'aire

Probabilités conditionnelles

- Pour décrire la probabilité que l'événement A se produise, si l'événement B s'est déjà produit.

$$P(A|B)$$

Événement ***A*** et ***B*** se sont produits : $\boldsymbol{A \cap B}$



Événement ***B*** s'est produit

probabilité est proportionnelle à l'aire

Probabilités conditionnelles

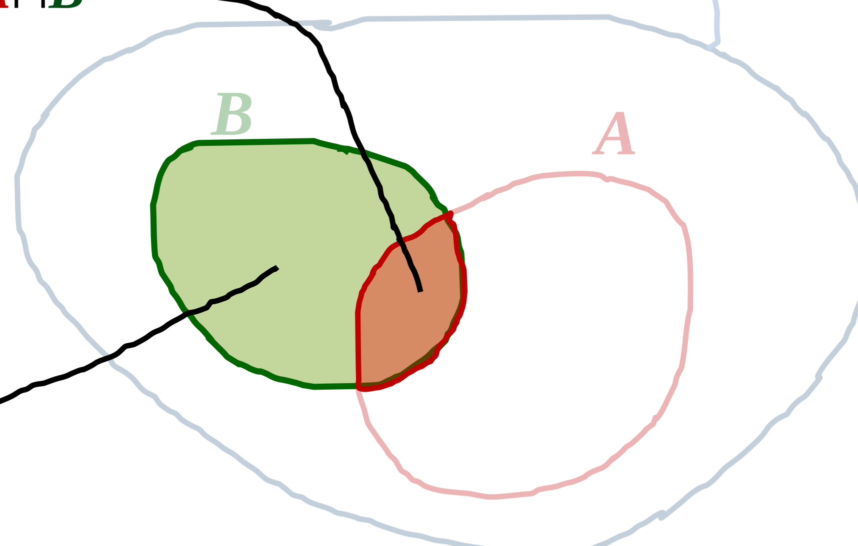
- Pour décrire la probabilité que l'événement A se produise, si l'événement B s'est déjà produit.

$$P(A|B)$$

Espace des événements possibles

Événement ***A*** et ***B*** se sont produits : $\boldsymbol{A \cap B}$

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A, B)}{P(B)}}$$



Événement ***B*** s'est produit

probabilité est proportionnelle à l'aire

Probabilités jointes/conditionnelles

Probabilité conditionnelle

$$\boxed{P(A\,|\,B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}}$$

Probabilité jointe

$$\overbrace{P(A,B)}^{\textit{probabilité d'avoir } A \textit{ et } B} = \underbrace{P(\quad|\,B)}_{\substack{\textit{probabilité} \\ \textit{d'avoir } A\textit{, si } B \\ \textit{est déjà arrivé}}}\;\overbrace{P(B)}^{\substack{\textit{probabilité} \\ \textit{d'avoir } B}}$$

Probabilités jointes/conditionnelles

Probabilité conditionnelle — Probabilité jointe

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}}$$

Aussi : $P(A,B) = P(B,A)$

$$\overbrace{P(A,B)}^{\textit{probabilité d'avoir } A \textit{ et } B} = \underbrace{P(A \mid B)}_{\substack{\textit{probabilité} \\ \textit{d'avoir } A\textit{, si } B \\ \textit{est déjà arrivé}}} \overbrace{P(B)}^{\substack{\textit{probabilité} \\ \textit{d'avoir } B}} = \underbrace{P(B \mid A)}_{\substack{\textit{probabilité} \\ \textit{d'avoir } B\textit{, si } A \\ \textit{est déjà arrivé}}} \overbrace{P(A)}^{\substack{\textit{probabilité} \\ \textit{d'avoir } A}}$$

Théorème probabilité totale

(marginalisation) $$P(A) = \sum_n P(A, B_n) = \sum_n P(A \mid B_n) P(B_n)$$

UNIVERSITÉ LAVAL

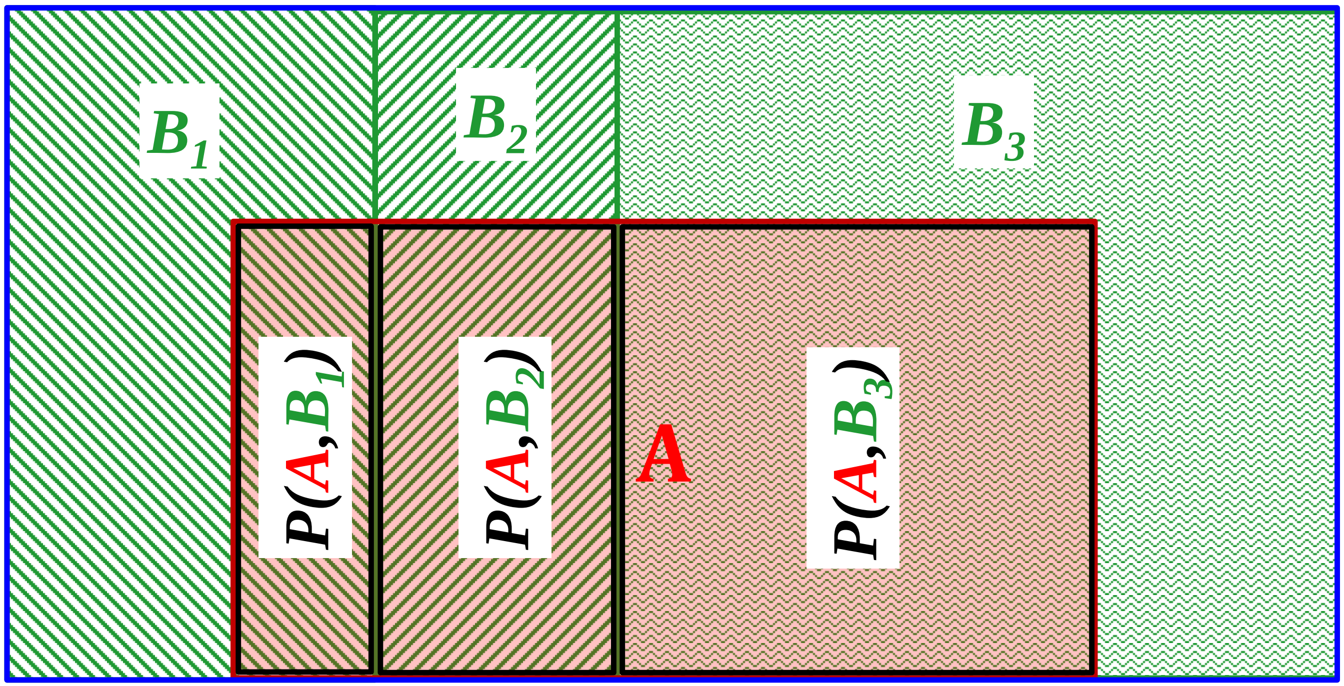
Théorème probabilité totale

$$P(A) = \sum_n P(A, B_n) = \sum_n P(A \mid B_n) P(B_n)$$

$$B \in \{B_1, B_2, B_3\}$$

$$P(A) = P(A, B_1) + P(A, B_2) + P(A, B_3)$$

Ensemble de tous les événements (aire=1)



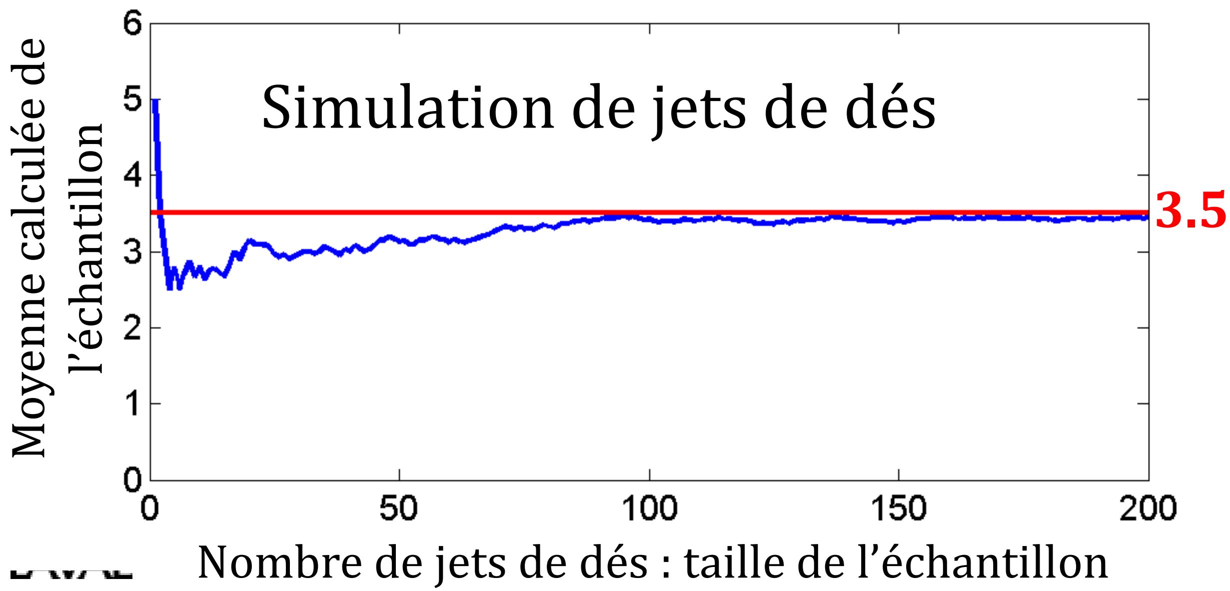
Espérance E[] (valeur moyenne)

- La valeur moyenne d'une variable aléatoire

$$E[X] = \sum xP(x) \quad \textit{(cas discret)}$$

- Pour l'exemple du dé :

$$E[X] = \frac{1}{6}1 + \frac{1}{6}2 + \frac{1}{6}3 + \frac{1}{6}4 + \frac{1}{6}5 + \frac{1}{6}6 = \frac{21}{6} = 3.5$$



Loi des grands nombres *: les caractéristiques statistiques d'un échantillon se rapproche des caractéristiques statistiques de la population à mesure que la taille de l'échantillon augmente*

Espérance $E[]$ (valeur moyenne)

- La valeur moyenne d'une variable aléatoire

$$E[X] = \int xp(x)dx \quad \textit{(cas continu)}$$

- Pour une gaussienne $\quad E[g(x)] = \boldsymbol{\mu}$

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

Variance Var()

- Mesure « l'étendue » d'une distribution

$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sigma_X^2$$

(σ_X est l'écart-type, donc la racine carrée de la variance)

$$Var(X) = \sum_x P(x)(x-\mu)^2 \quad \textit{pour le cas discret}$$

$$Var(X) = \int p(x)(x-\mu)^2\,dx \quad \textit{pour le cas continu}$$

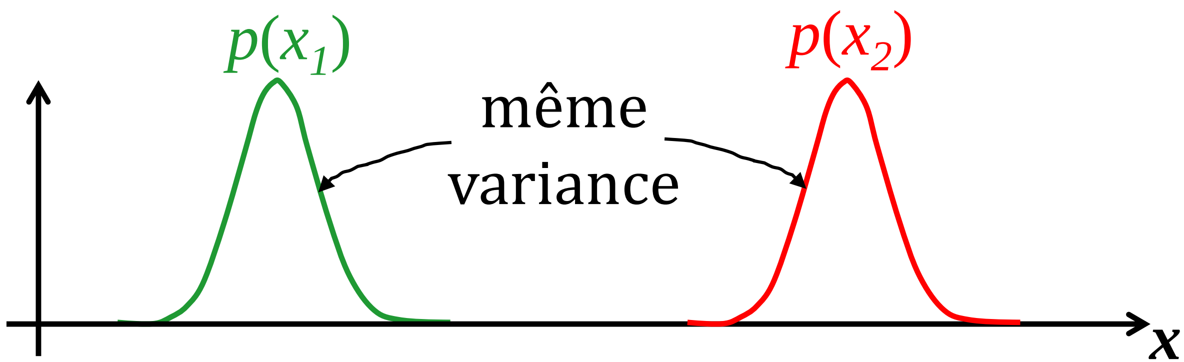
Variance d'une gaussienne est $\boldsymbol{\sigma^2}$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Propriétés de la variance

- Une constante ne joue pas dans la variance

$$Var(aX+b)=Var(aX)=a^2Var(X)$$



- Somme de deux variables aléatoires X et Y

$$Var(aX+bY)=a^2Var(X)+b^2Var(Y)+2ab\underbrace{Cov(X,Y)}_{\text{égal à 0 si } X,\ Y \text{ sont indépendantes}}$$

note : $\mathrm{cov}(X,Y)=E\left[\left(X-E[X]\right)\left(Y-E[Y]\right)\right]$

Modèle probabiliste de capteurs

Modéliser un capteur : déterministe

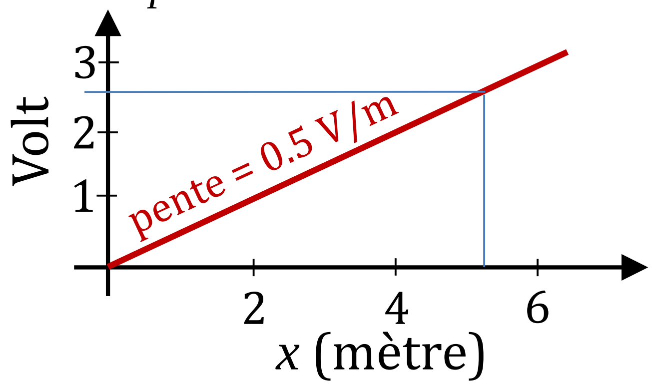
- Modèle déterministe
  - pas de bruits

    $z = f_{capteur}(x)$
- Si le système (x) ne change pas, z reste constant entre les mesures

Exemple : télémètre laser

Cas : capteur déterministe sans bruit

$z = f_{capteur}(x) = 0.5x$



Pourquoi des Volts? Pour bien montrer que je n'ai pas besoin d'avoir les mêmes unités pour x et z.

Prend des mesures

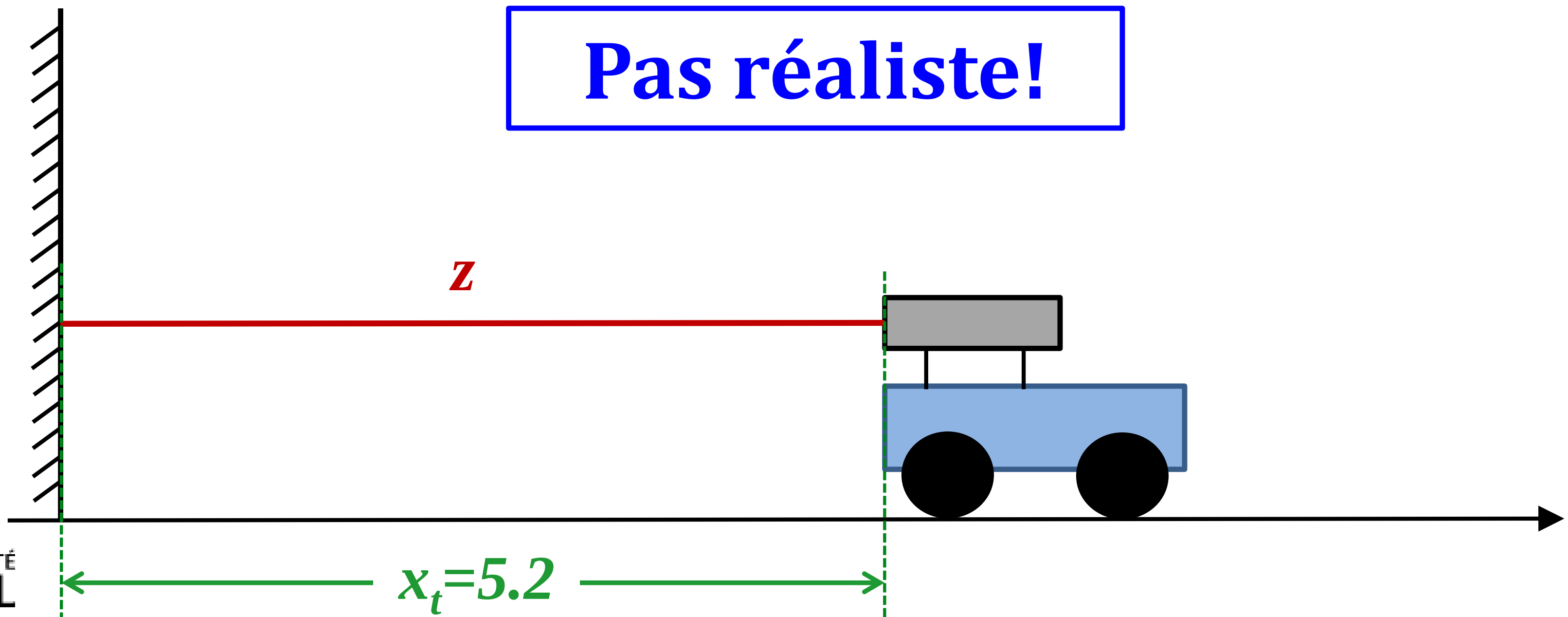
z_1 = **2.60** Volt

z_2 = **2.60** Volt

z_3 = **2.60** Volt

z_4 = **2.60** Volt

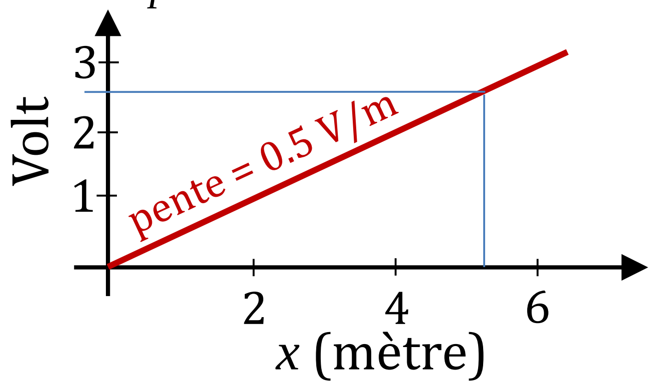
Pas réaliste!



Exemple : télémètre laser

Cas : Réalité

$z=f_{capteur}(x)=0.5x$



Résultats partiellement aléatoires!

(mais proche de 2.60 V)

Prend des mesures

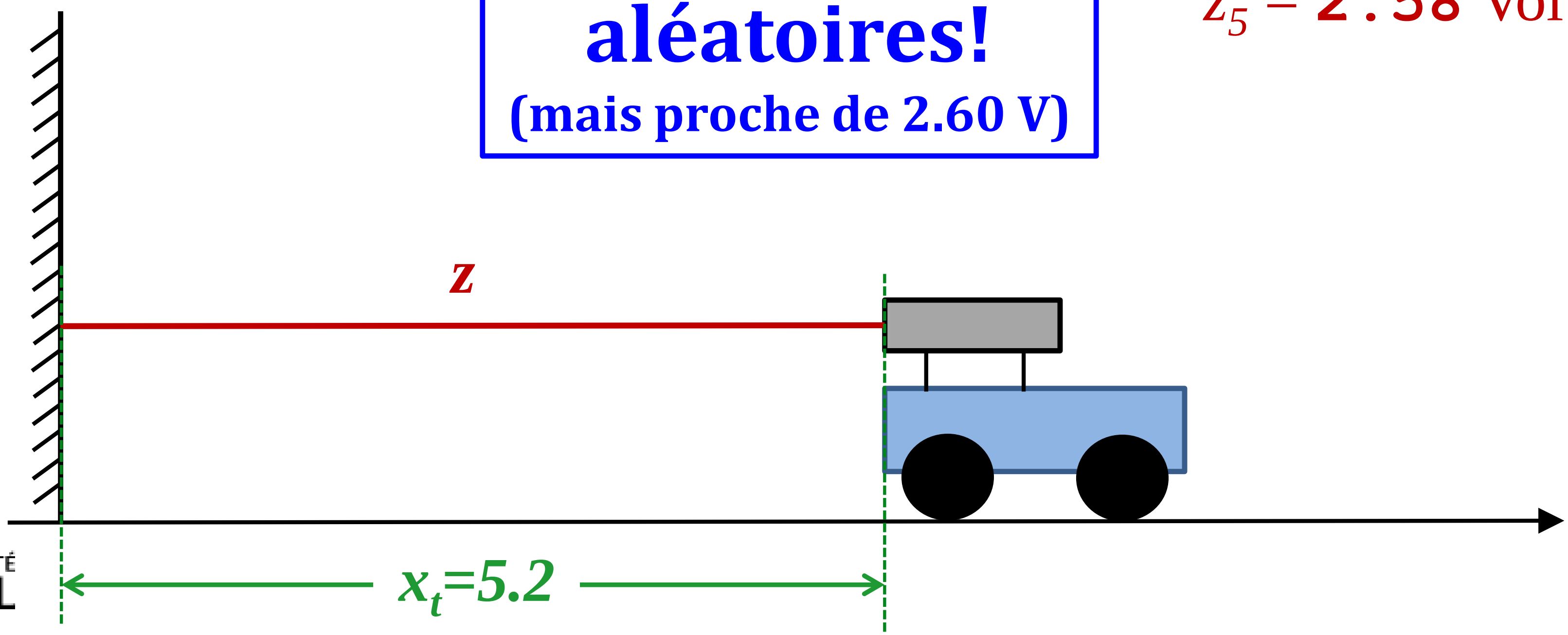
z_1 = **2.63** Volt

z_2 = **2.45** Volt

z_3 = **2.74** Volt

z_4 = **2.71** Volt

z_5 = **2.58** Volt

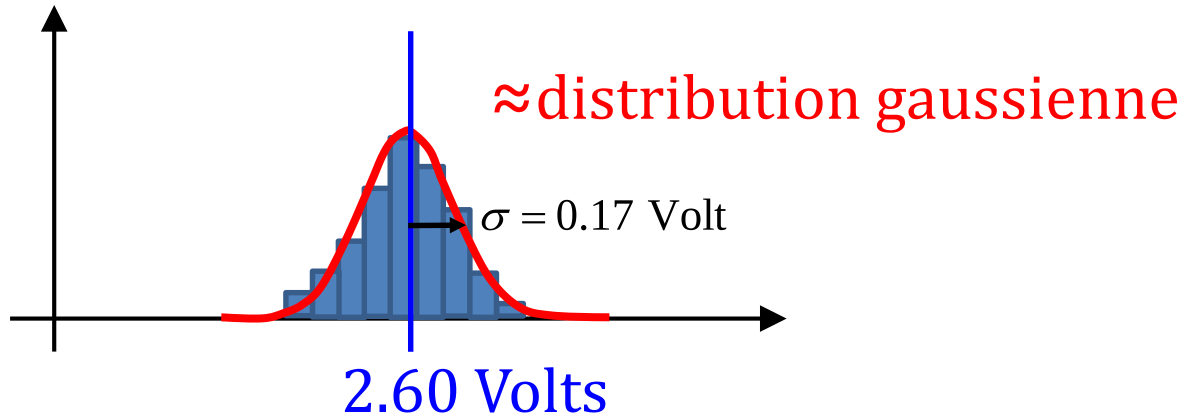


UNIVERSITÉ LAVAL

Exemple : télémètre laser

- Prend beaucoup de mesures z (1,000+ mesures)
- Distribution de z_i (`hist` matlab, `numpy.histogram` Python)

histogramme des mesures z_i



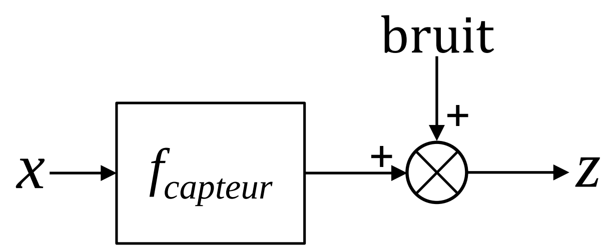
pige dans une distribution…

avec moyenne…

$$\boxed{z \sim N(f_{capteur}(x), \sigma_{\text{capteur}}{}^2)}$$

normale…

et variance



Modéliser un capteur : probabiliste

- Monde est rempli de bruits
  - interférence électromagnétique
  - vibrations
  - bruit de grenaille (shot noise)
  - bruit thermique
  - bruit en créneaux
  - bruit de quantification
  - etc…

réalité physique

- Modèle probabiliste : **capteur est une distribution**

déterministe		***probabiliste***
$z = f_{capteur}(x)$	$\Rightarrow$	$p(z \mid x)$

l'art de bien modéliser un capteur…

Quelle est la prob. d'une mesure z

sachant l'état x du système

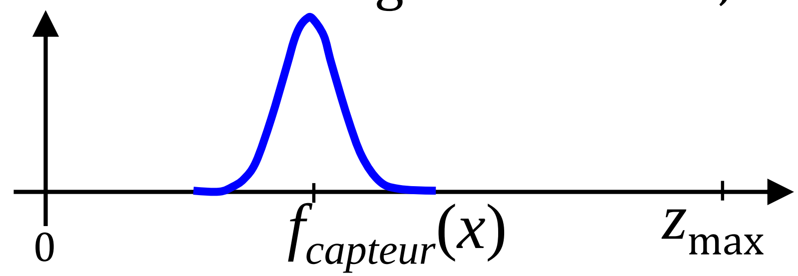
Exemple précédent $z = 0.5x$ $z \sim N(0.5x, 0.17^2)$

Exemple de modélisation

- Soit un capteur qui :

A) 80% du temps retourne une mesure valide mais bruitée gauss. σ=0.25;

$$\boxed{p_{valide}(z \mid x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z - f_{capteur}(x))^2}{2\sigma^2}}}$$



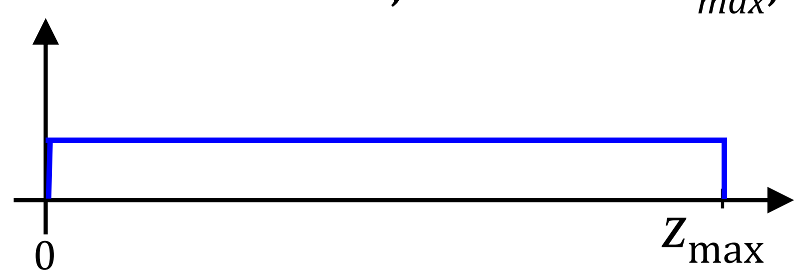
B) 15% du temps manque la cible et retourne la valeur maximale z_{max};

$$\boxed{p_{manque}(z \mid x) = \delta(z - z_{\max})}$$

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

C) 5 % du temps donne une valeur complètement aberrante, entre 0 et z_{max};

$$\boxed{p_{aberr}(z \mid x) = \frac{1}{z_{\max}}}$$



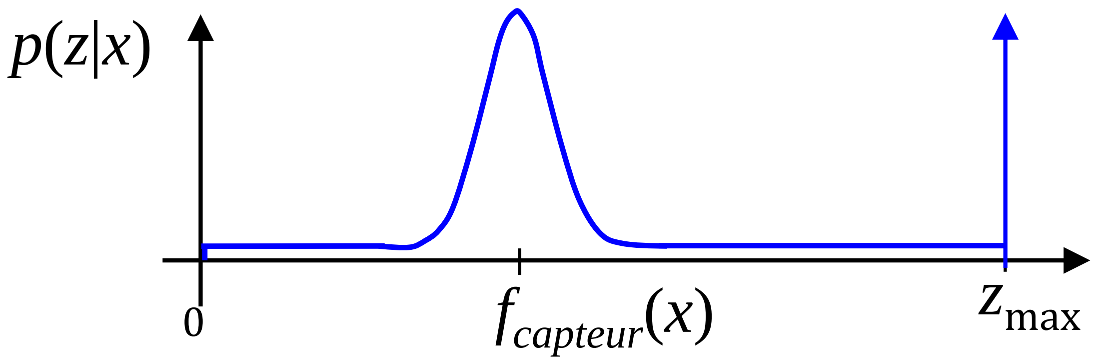
UNIVERSITÉ LAVAL

$\delta(\,)$: voir http://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function

Exemple de modélisation

- Notre capteur au complet :

$$p(z \mid x) = 0.80\, p_{valide}(z \mid x) + 0.15\, p_{manque}(z \mid x) + 0.05\, p_{abber}(z \mid x)$$



- La distribution $p(z|x)$ encode les trois modes d'opération du capteur!
- Va nous permettre
  - simuler un capteur (très utile) (probabilité)
  - faire de l'inférence $z \rightarrow x$ (prochaine section…) (vraisemblance)

Inférence Bayésienne

Inférence Bayésienne

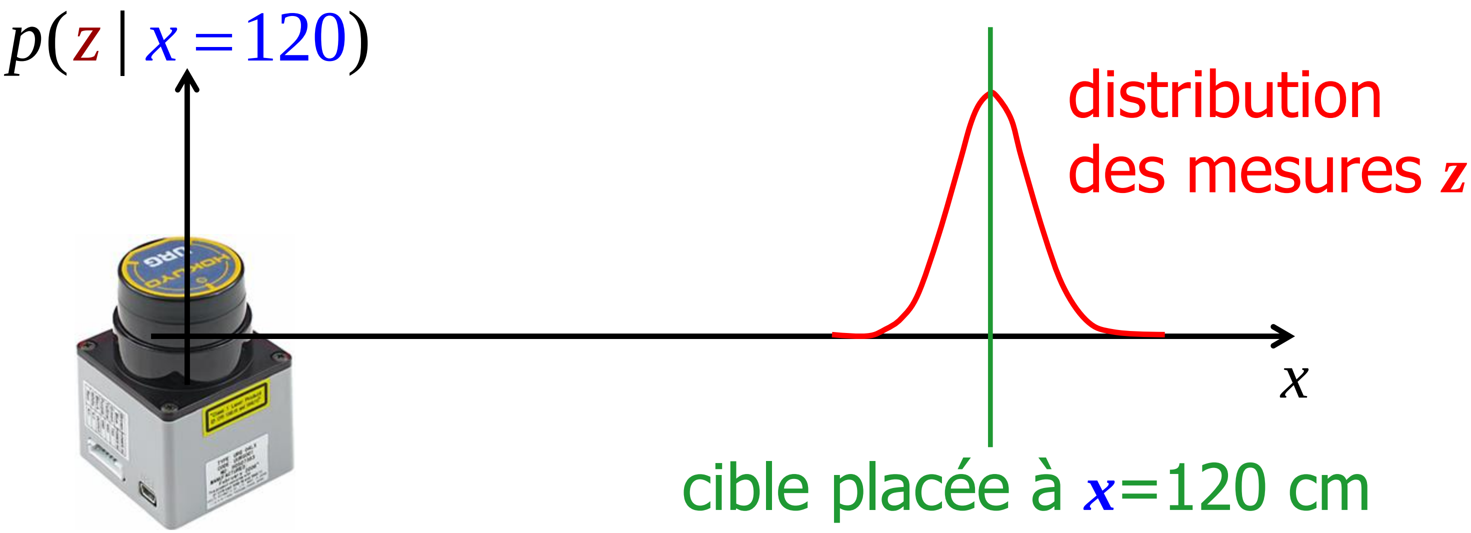
- Dans de nombreux cas :
  - on connait $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$
  - mais on cherche $P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A})$

« Le théorème de Bayes permet d'inverser les probabilités. C'est-à-dire que si l'on connaît les conséquences d'une cause, l'observation des effets permet de remonter aux causes. »

wikipedia.org

Exemple en robotique

- On peut facilement caractériser la distribution *(pdf)* notre capteur



- Ultimement on cherche la distribution $p(x|z)$ *(où suis-je)*, à partir d'une mesure* (z = 1.234 m, par exemple) et de $p(z|x)$

*ou une série de mesures

Théorème de Bayes

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}}$$

octobre 2012

- On laisse souvent tomber le dénominateur, car c'est juste une constante de normalisation indépendante de A

$$\boxed{P(A|B)} \propto \boxed{P(B|A)}\boxed{P(A)}$$

nouvelle croyance sur A — observe nouvelle évidence B — *prior (a priori)*

Interprétation

(on va souvent y revenir pour démystifier le tout….)

Exemple Bayes Classique

- Vous passez un test médical pour la maladie M. Le test est positif (T). Souffrez-vous de la maladie M?

M→ malade
m→ non-malade
T→ test positif
t → test négatif

- On cherche $P(M|T)$
- Le fabricant du test nous donne
  $P(T|M)$=0.92 et $P(T|m)$=0.05
  note : $P(t|M) = 1\text{-}P(T|M)$

prior

- Le corps médical nous donne $P(M)$=0.01

$$P(M \mid T) = \frac{P(T \mid M)P(M)}{\underbrace{P(T)}_{manque}}$$

P(T)= P(T,M) + P(T,m) loi prob. totale. Une personne est malade ou ne l'est pas, mais pas les 2.
P(T)= P(T|M)P(M) + P(T|m)P(m)
P(T)= 0.92*0.01 + 0.05(1-0.01)
P(T)= 0.0587 ← probabilité que si je prends une personne au hasard, elle aura un test positif

$$P(M \mid T) = \frac{0.92 \times 0.01}{0.0587} = 0.1567$$

Important! C'est moins que $P(T|M)$=0.92

Bayes en robotique

- Fondement des méthodes d’estimation d’état (filtrage Bayésien)
- Voir l’intuition derrière les équations

x : position du robot

z : mesure du capteur

$$\underbrace{p(x|z)}_{\text{meilleur estimé de l'état } x \text{, en incorporant la mesure } z} \propto \overbrace{p(z|x)}^{\text{modèle du capteur bruité}} \underbrace{p(x)}_{\text{connaisance préalable (}\textit{prior}\text{) de l'état } x \text{ (position) du robot}}$$

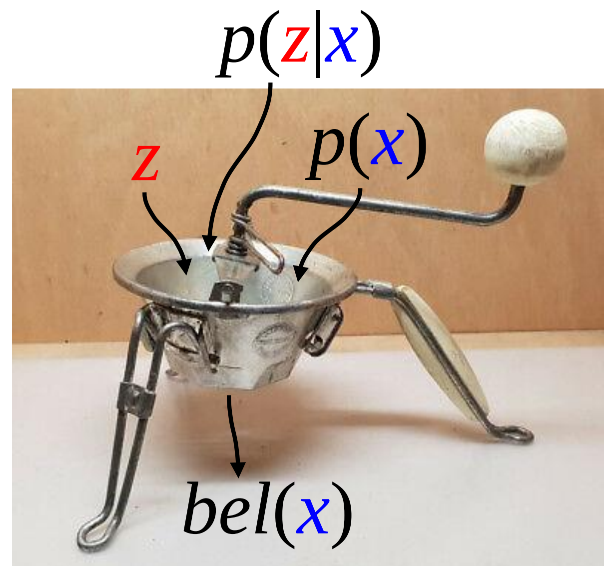
Bayes en robotique

- Fonction sur x, après avoir incorporé l'information d'une mesure z réalisée

constante

$$\underbrace{bel(x)}_{\substack{\text{croyance} \\ (\textit{belief})}} = p(x|z) \propto p(z|x)p(x)$$

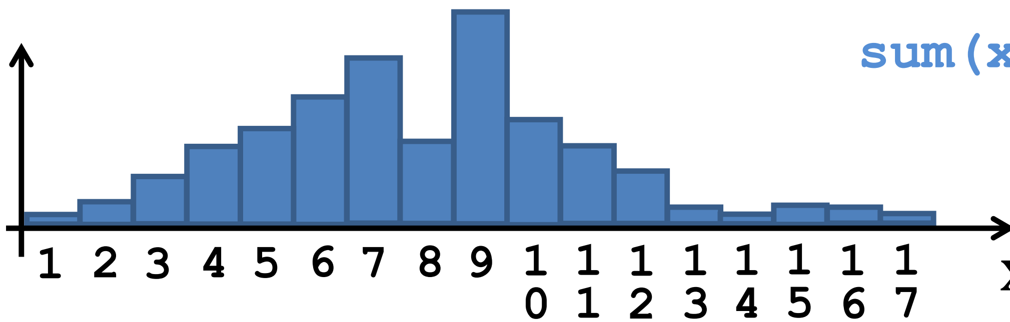
variable



Application Bayes (distribution discrète)

a priori p[x]

vecteur x :



sum(x) égale à 1

x (indice)

J'ai la mesure z_t réalisée (pigée)

est-ce que ma mesure z_t est vraisemblable, pour cette position x?

Mettre à jour la croyance

$$bel(x) = p(x \mid z = z_t) = \frac{p(z = z_t \mid x)\, p[x]}{\sum_x \{p(z = z_t \mid x)\, p[x]\}}$$

```
for index = 1:size(x,2)
    px_z(index) = PdfCapteurFunc(zt,x(index))*px(index);
end
NormalizeFactor = 1/sum(px_z);
px_z = px_z*NormalizeFactor;
```

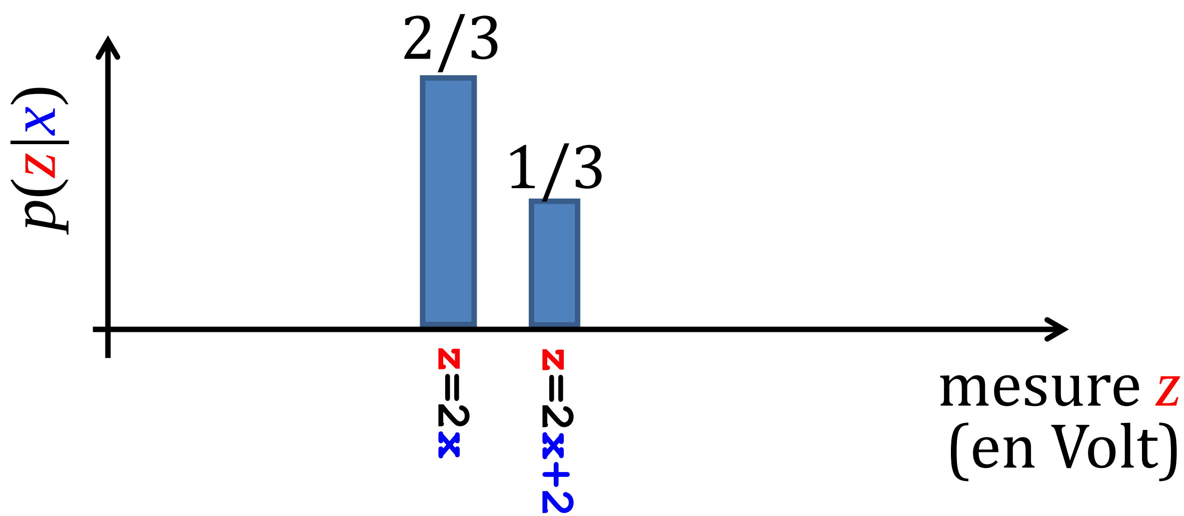
normalisation

La connaissance du capteur est codée dans la fonction $p(z|x)$!

(et je n'ai plus à inverser la fonction du capteur!)

Exemple 1 : distribution discrète

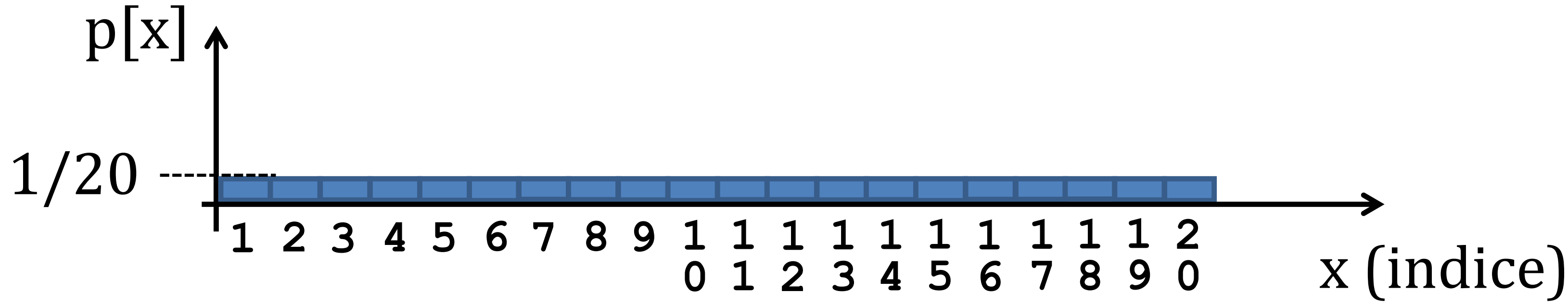
- Fonction de capteur $p(z|x)$:



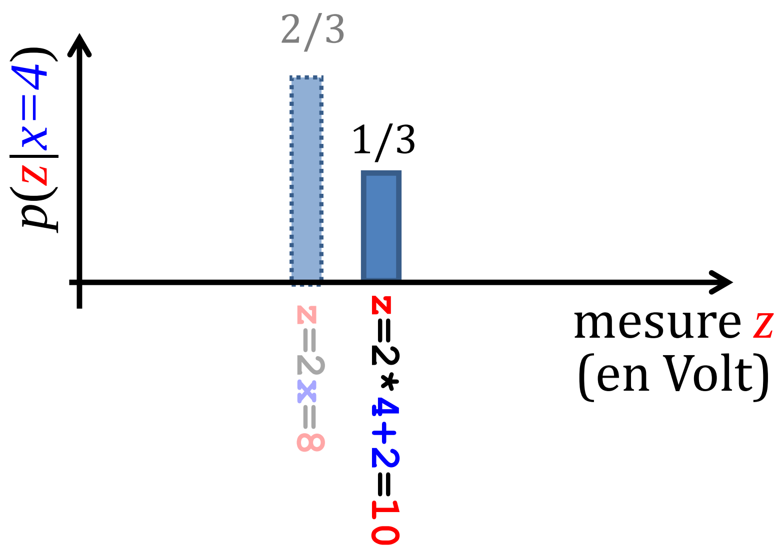
- Par exemple, si le robot est à **x=9**, alors :
  - le capteur retournera la mesure **18** ***Volts*** 67% du temps
  - " " " " " **20** ***Volts*** 33% " "

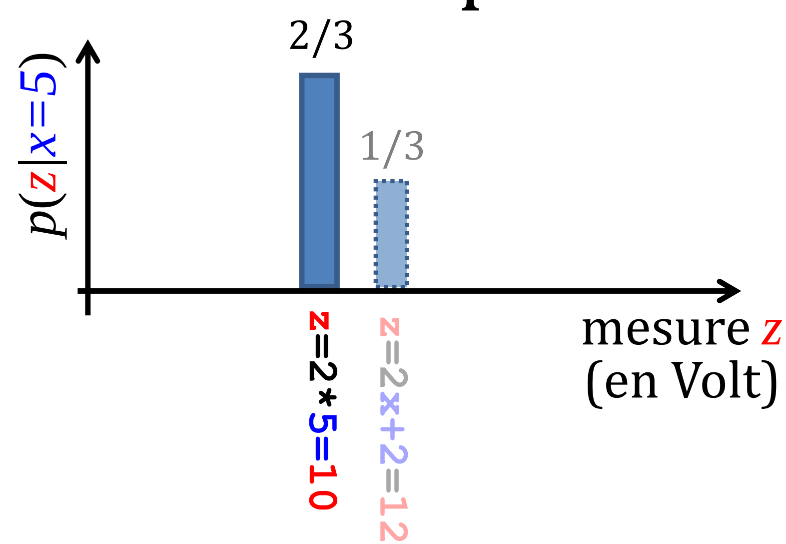
Exemple 1 : prior uniforme, 1ère mesure

- Prior uniforme sur x :



- Mesure z=10 Volts : les deux seuls x compatibles

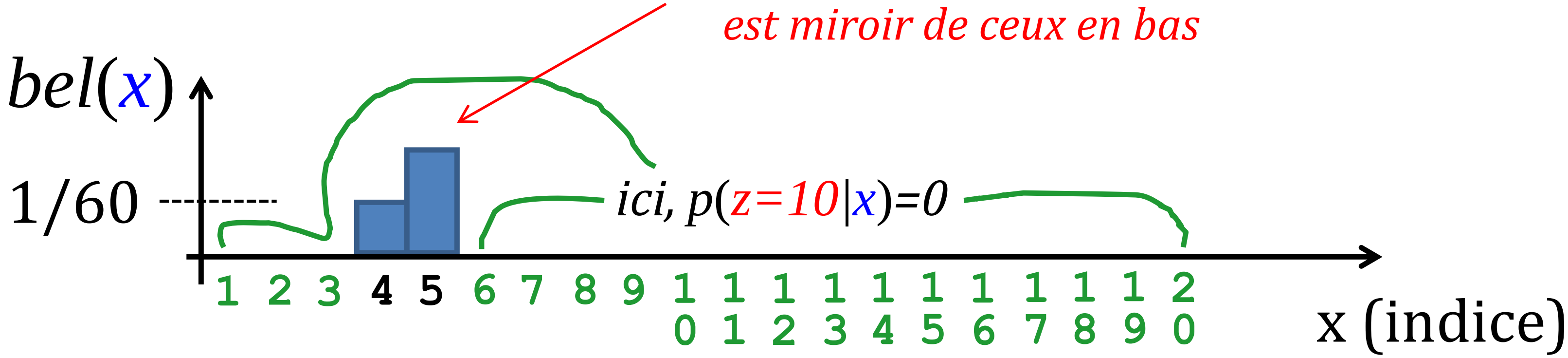




Attention : on n'infère pas normalement de cette manière. Uniquement pour sauver du temps dans cet exemple!

Exemple 1 : prior uniforme, $1^{ère}$ mesure

Notez comment la distribution est miroir de ceux en bas



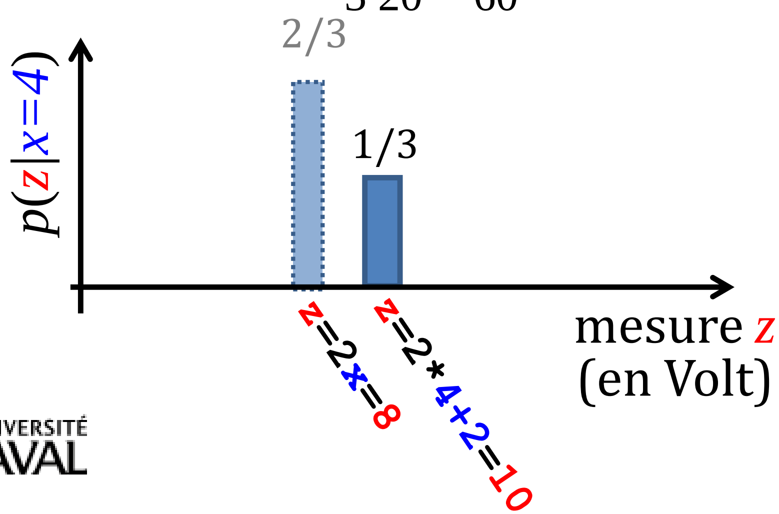
- *(en passant par-dessus les mises à jour mettant à 0 p(x|z))*

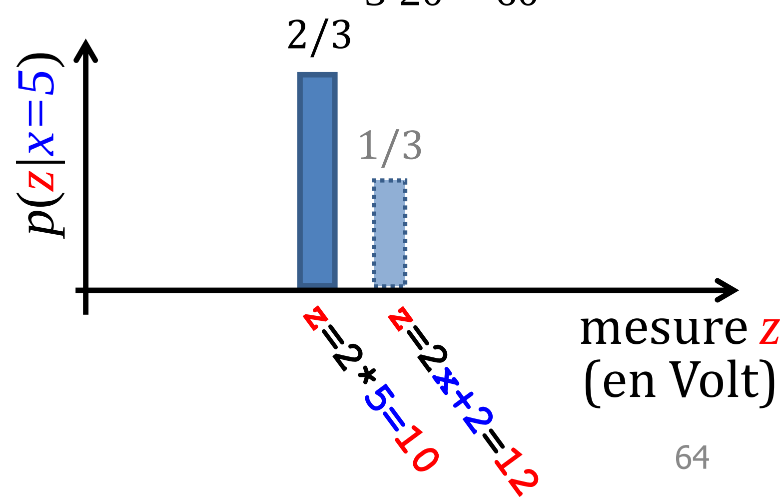
$$p(x=4\,|\,z=10) \propto p(z=10\,|\,x=4)\,p(x=4)$$

$$p(x=4\,|\,z=10) \propto \frac{1}{3}\frac{1}{20} = \frac{1}{60}$$

$$p(x=5\,|\,z=10) \propto p(z=10\,|\,x=5)\,p(x=5)$$

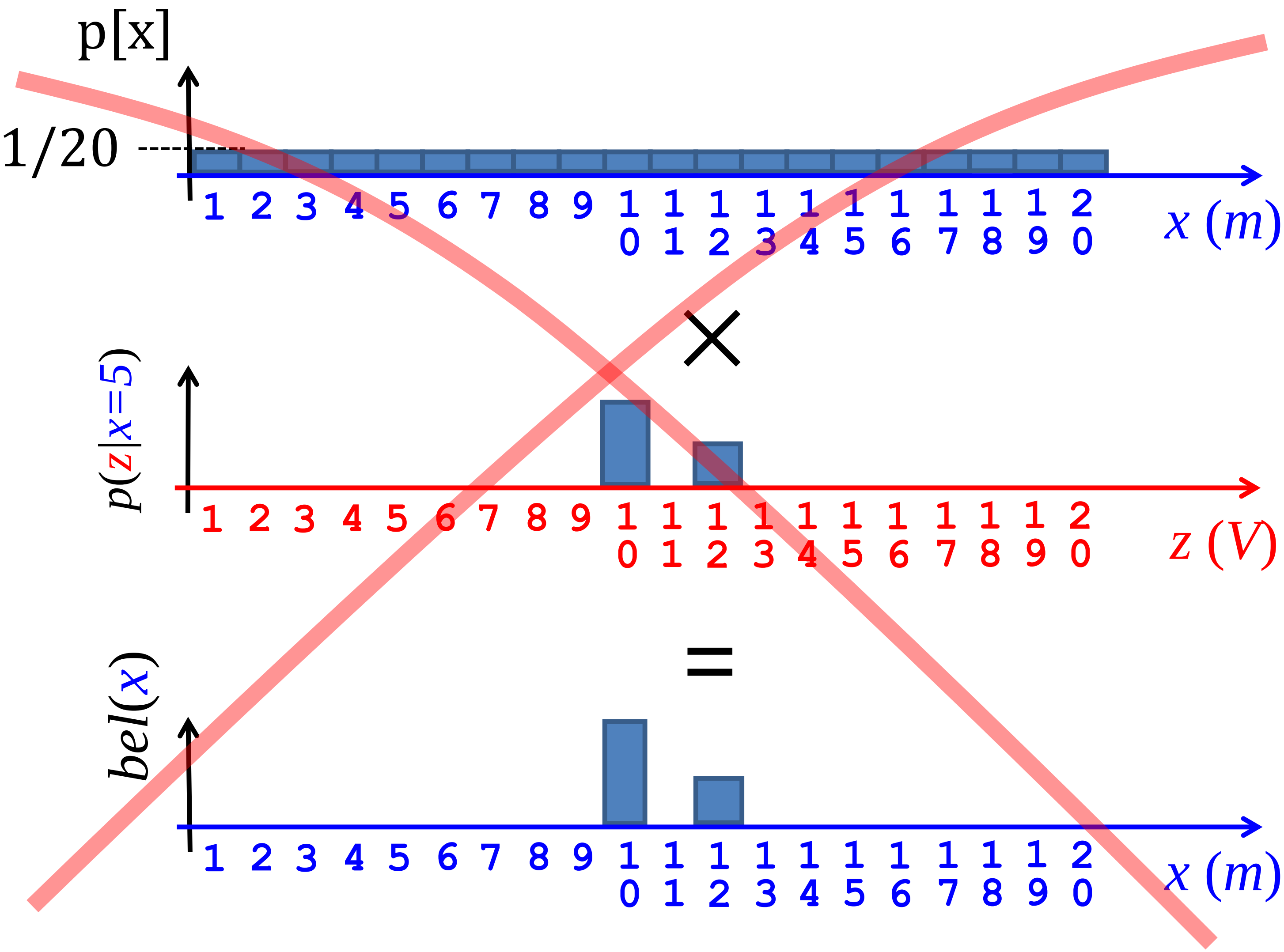
$$p(x=5\,|\,z=10) \propto \frac{2}{3}\frac{1}{20} = \frac{2}{60}$$





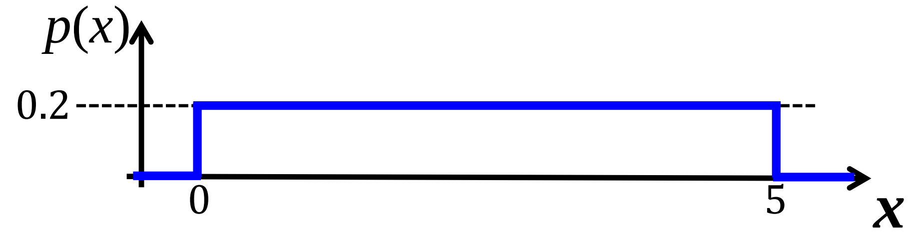
Ne faites pas ceci!

- Multiplier des distributions sur *m* avec distributions sur V??
- Pas de sens au niveau probabilité



Exemple Bayes 2

Prior uniforme $p(x)$
(indique qu'on ne sait pas où on se trouve)



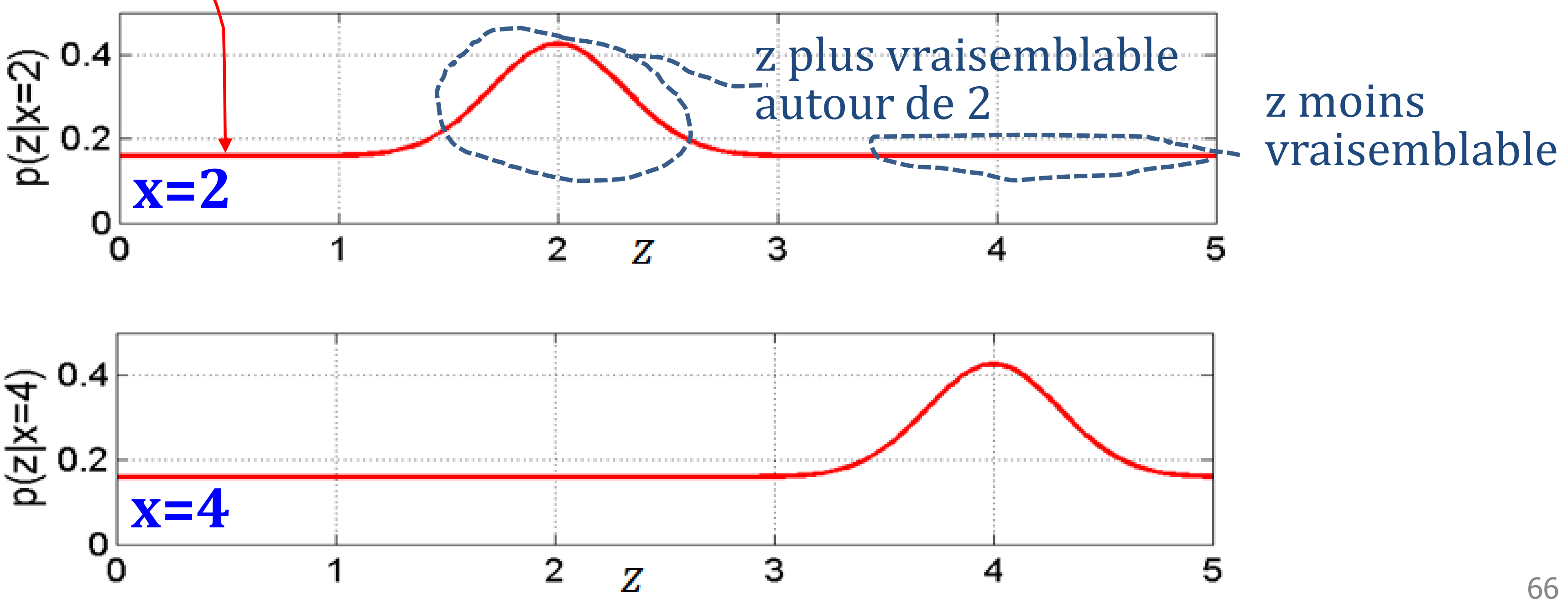
Capteur très boiteux!

- 80% retourne une valeur au hasard entre 0 et 5
- 20% pige dans une normale $N(\mu = \textit{vrai position}, \sigma^2 = 0.3^2)$

$$p(z \mid x) = 0.80\frac{1}{5} + 0.20\frac{1}{0.3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2\cdot 0.3^2}}$$

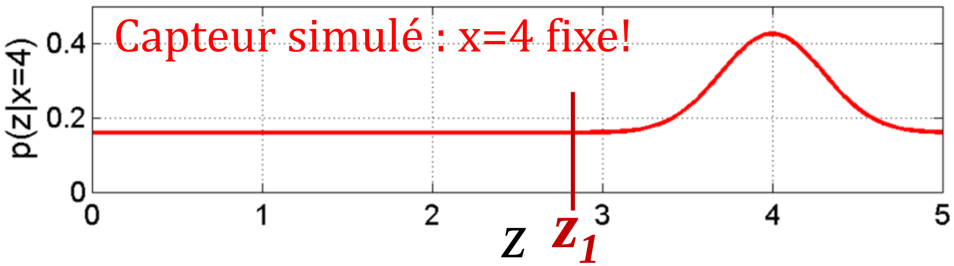
fonction en z seulement

une fonction de vraisemblance de mesure pour chaque x



Exemple Bayes 2 : Simulation et calcul

Vrai position : x=4!



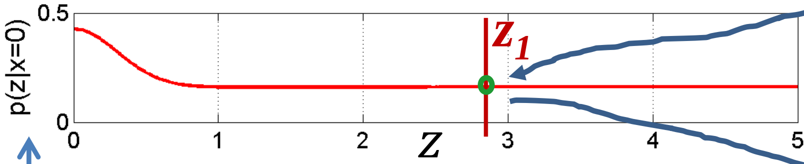
Pige une mesure z_t dans p(z|x=4), pour simuler une mesure bruitée

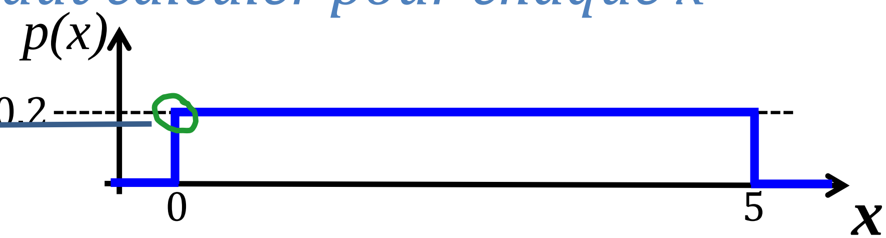
(Dans un vrai système, on ferait une lecture du capteur)

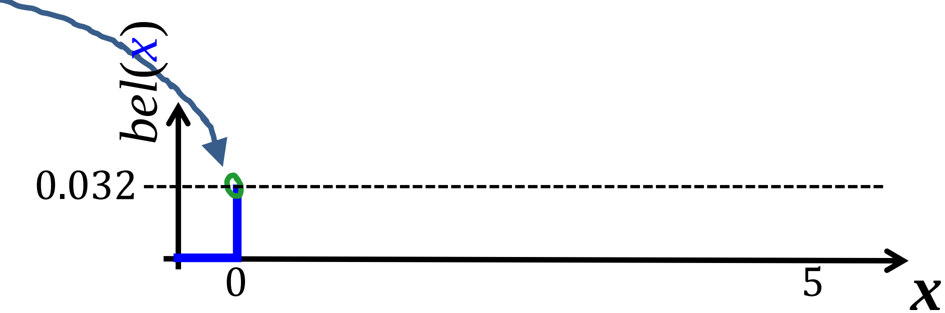
Incorporer la mesure z_t dans notre prior $p(x)$ pour obtenir la nouvelle croyance $bel(x)$

$$\boxed{p(x \mid z = z_t) = p(z = z_t \mid x)\, p(x)}$$

il faut calculer pour chaque x



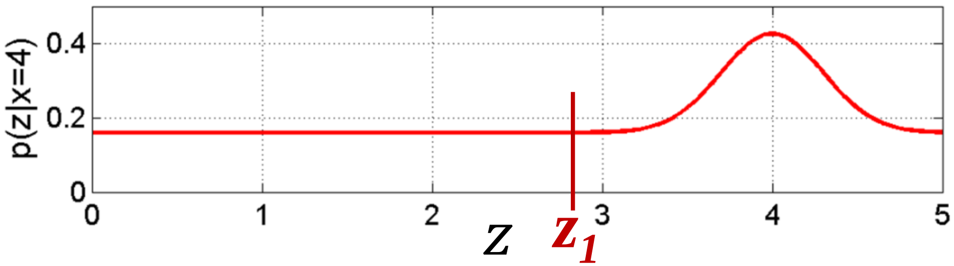




mesure moins probable

probabilité/vraisemblance d'avoir la mesure z, en admettant que le robot est à x=0

Exemple Bayes 2 : Simulation et calcul

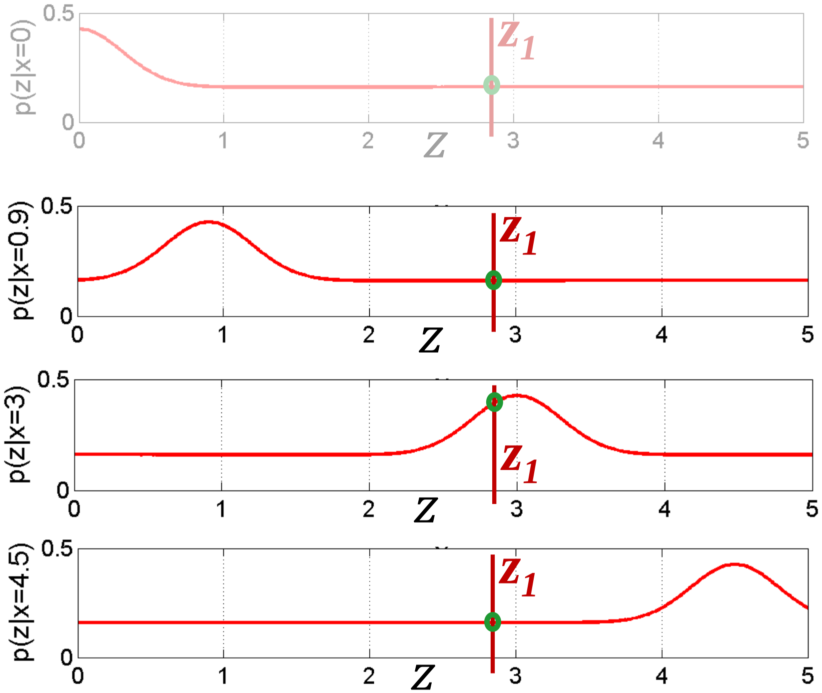


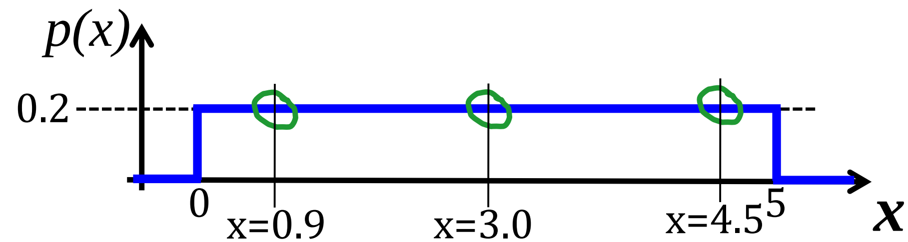
Pige une mesure z_t dans p(z|x=4), pour simuler une mesure bruitée

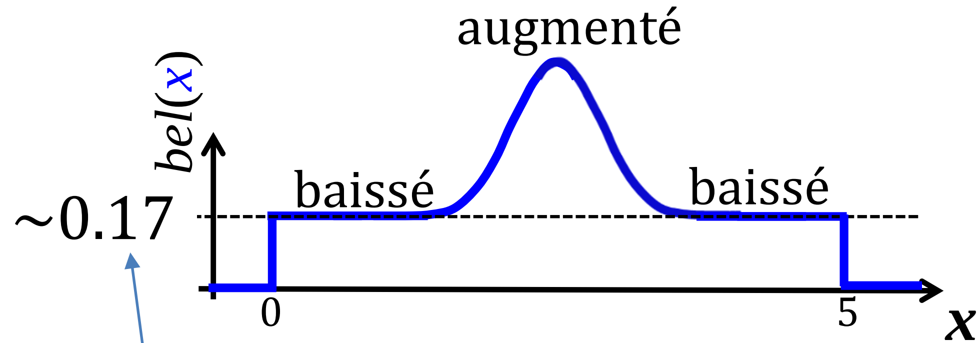
(Dans un vrai système, on ferait une lecture du capteur)

Incorporer la mesure z_t dans notre croyance (bel(x)) représentée par p(x)

$$\boxed{p(x \mid z = z_t) = p(z = z_t \mid x)\, p(x)}$$



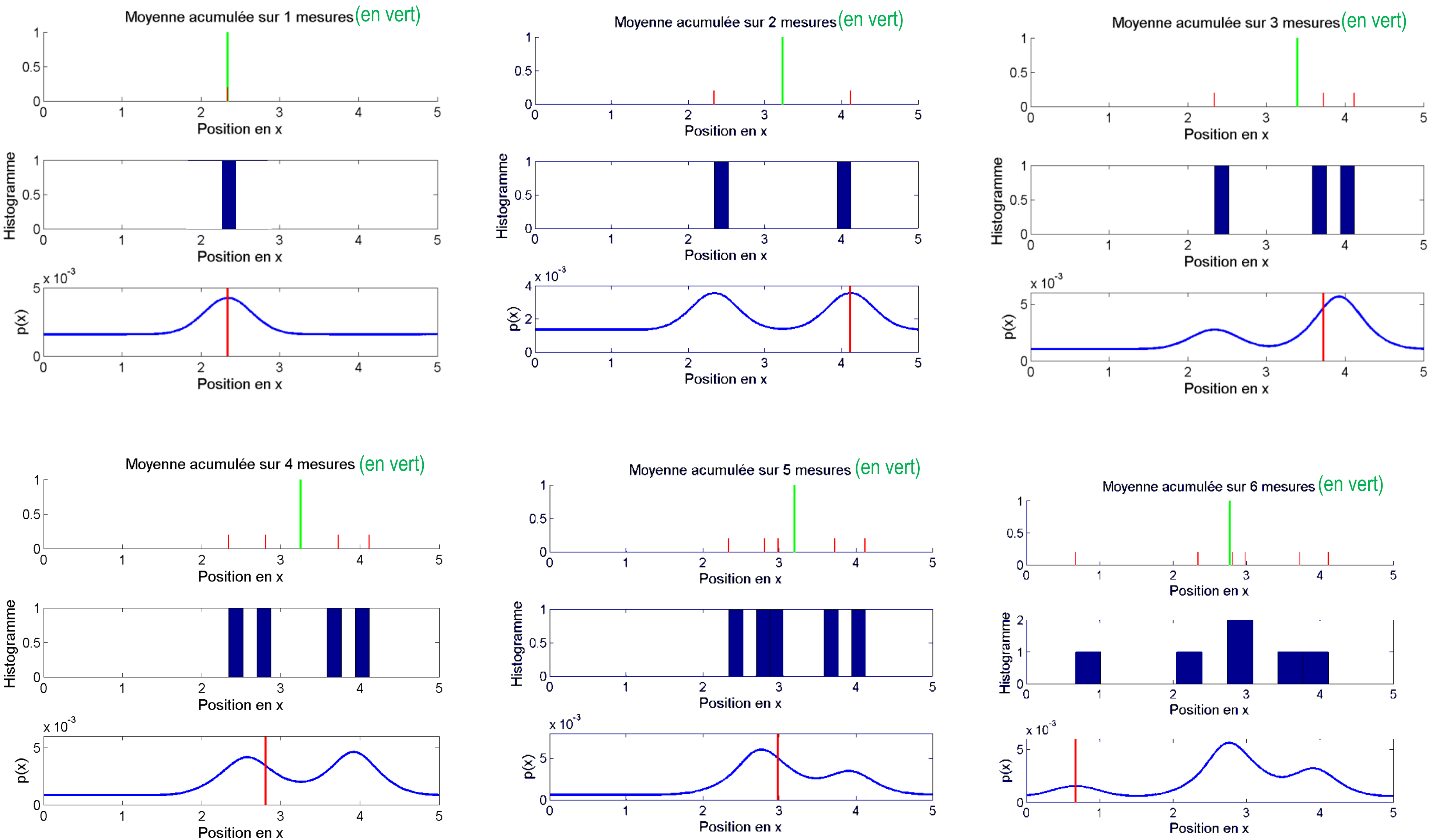




(après normalisation)

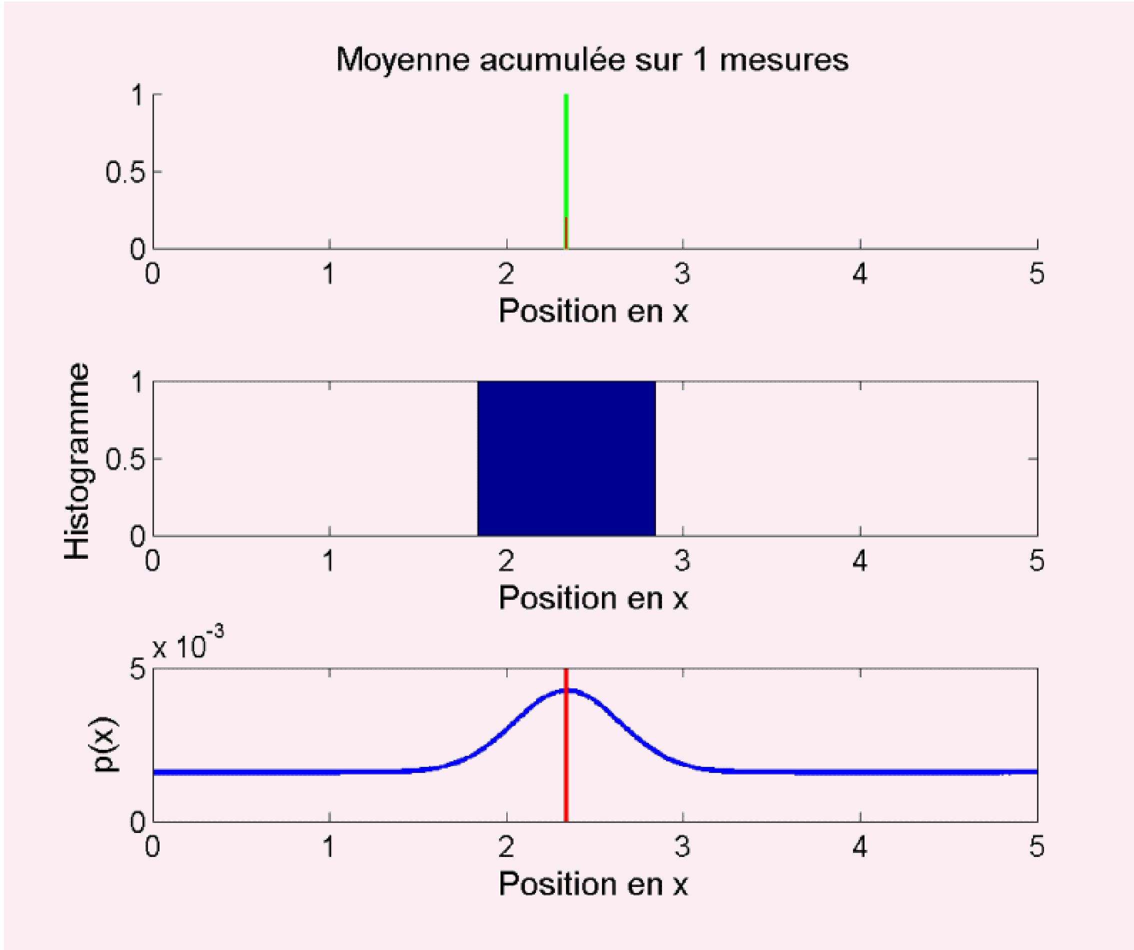
Exemple Bayes 2 : premières mesures

Vrai position : x=**4**!



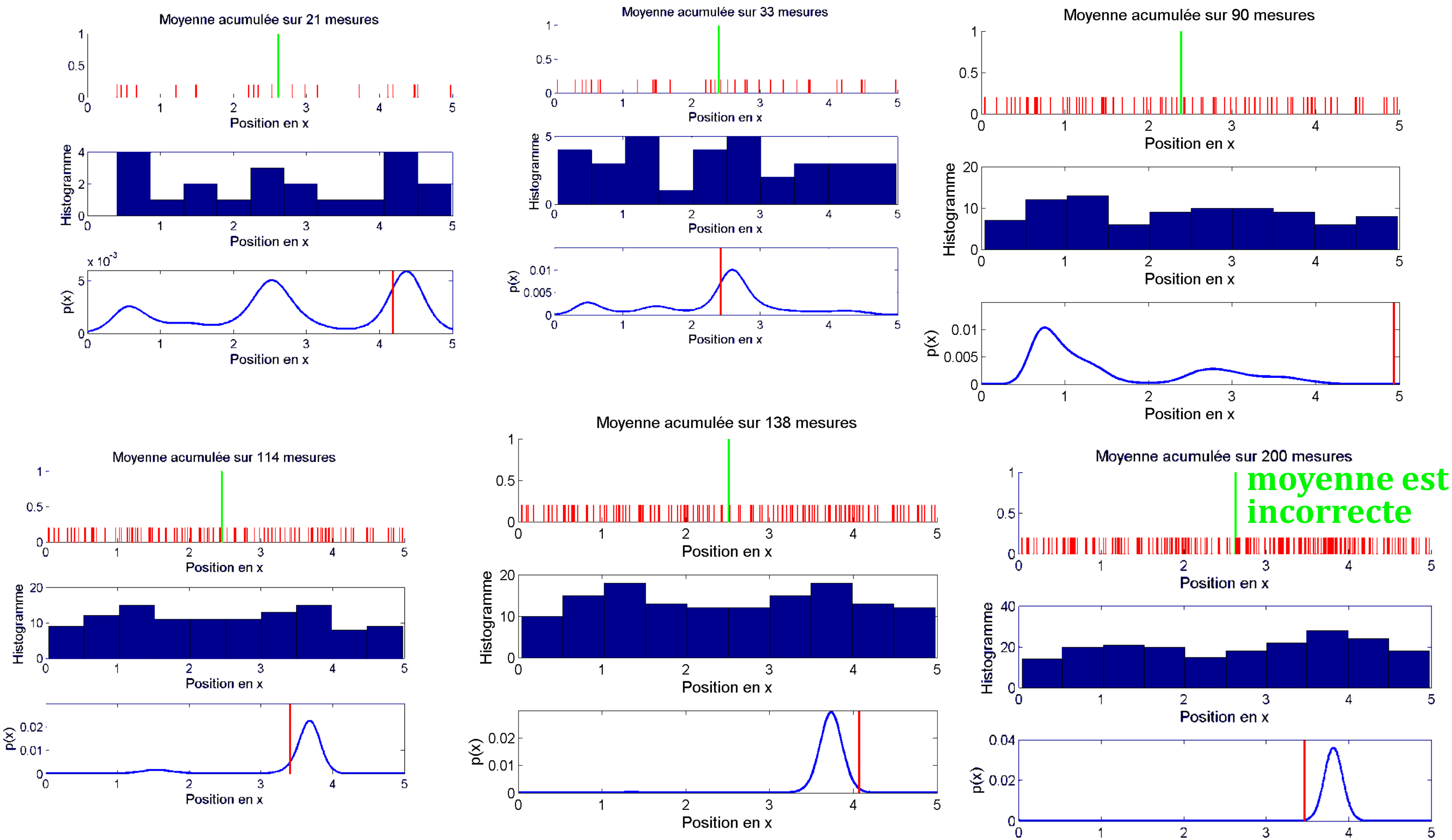
Exemple Bayes 2 : animation

Vrai position : x=**4**!



Exemple Bayes 2 : en accéléré…

Vrai position : x=**4**!

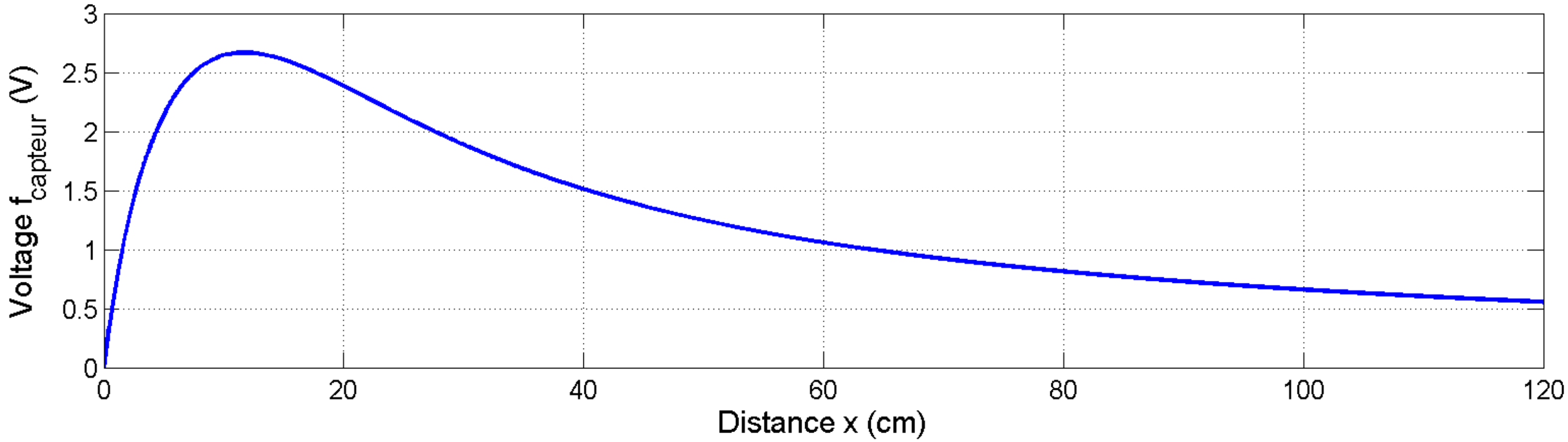


Toute la connaissance du capteur est codée dans $p(z|x)$.
C'est tout ce que Bayes a eu besoin!

Exemple 3 : capteur non-bijectif

- La fonction du capteur non-bruitée est :

$$f(x) = 70\tanh(0.07x)/(x+6)$$

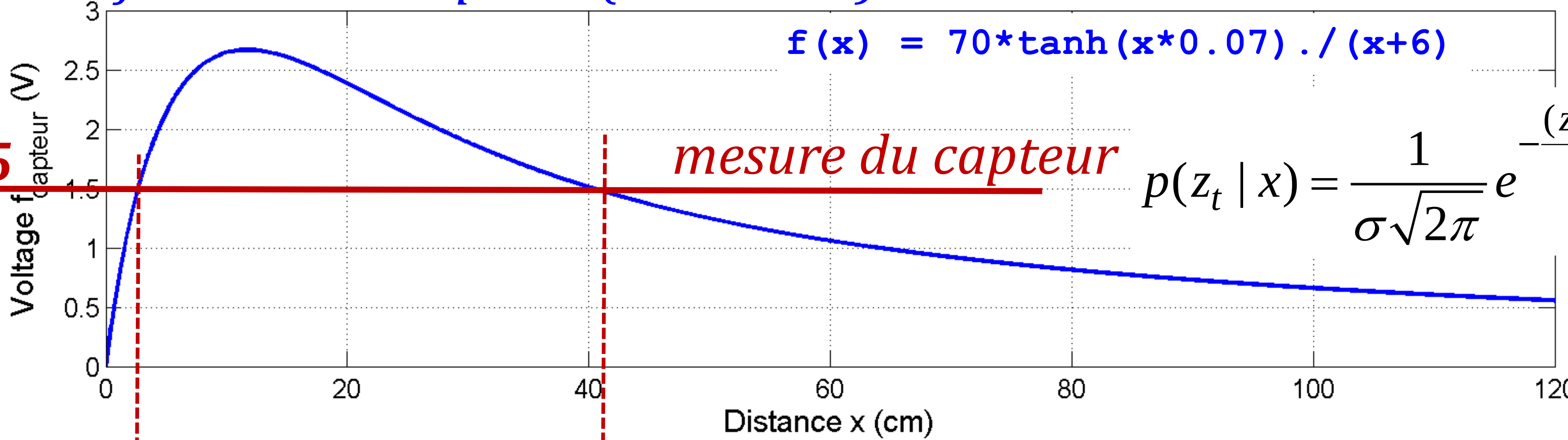


- Le bruit gaussien est appliqué sur le voltage

$$z(x) = N(f(x),\sigma^2)$$

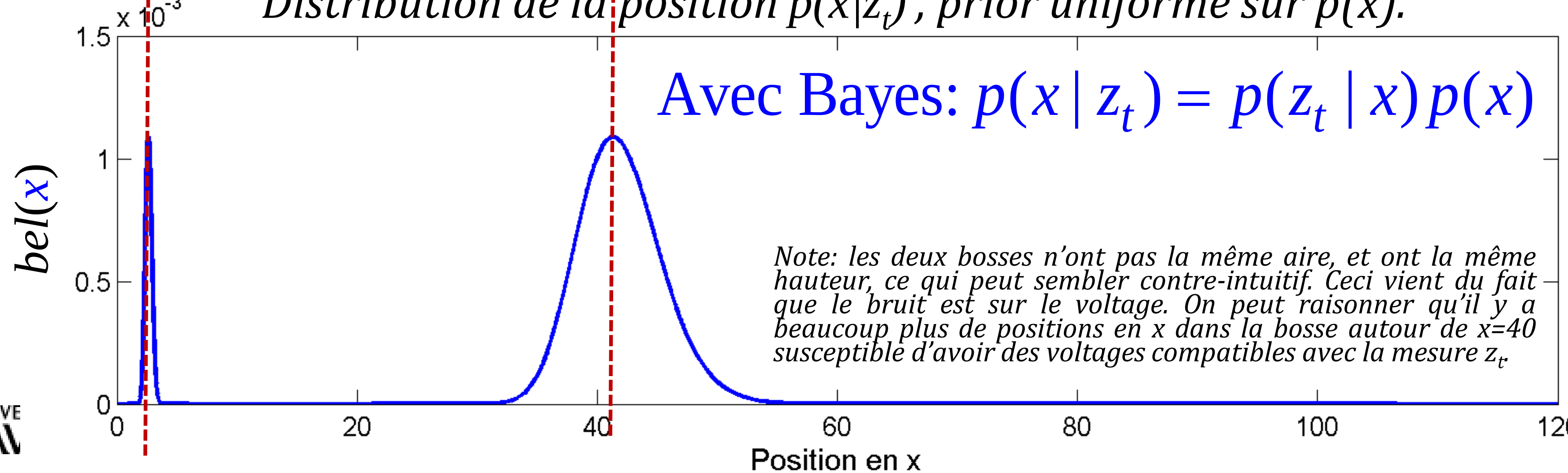
Bayes « inverse » le capteur : $z \rightarrow x$

fonction du capteur (sans bruit)



$$p(z_t \mid x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z_t - f(x))^2}{2\sigma^2}}$$

Distribution de la position $p(x|z_t)$, prior uniforme sur $p(x)$.



Avec Bayes: $p(x \mid z_t) = p(z_t \mid x)\, p(x)$

Note: les deux bosses n'ont pas la même aire, et ont la même hauteur, ce qui peut sembler contre-intuitif. Ceci vient du fait que le bruit est sur le voltage. On peut raisonner qu'il y a beaucoup plus de positions en x dans la bosse autour de x=40 susceptible d'avoir des voltages compatibles avec la mesure z_t.