TENTATIVE DE DÉMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE SYRACUSE

LA CONJECTURE DE SYRACUSE :

Un énoncé de la conjecture de syracuse est celui-ci : « Quand on part d'un entier strictement positif n quelconque et que, de manière répétée, on le divise par 2 s'il est pair et on le remplace par 3n + 1 s'il est impair, on finit toujours par tomber sur 1. »

TENTATIVE DE DÉMONSTRATION :

Opérons une récurrence un peu spéciale : au lieu de seulement supposer, comme dans une récurrence forte, que notre propriété est vraie pour tout entier compris entre 1 et n (avec n un entier naturel strictement positif), on va poser l'hypothèse suivante. Supposons vraie la propriété suivante (que j'énoncerai plus tard) pour, lorsque n est un entier naturel strictement positif :

- tout entier naturel non nul compris entre 1 et n
- pour tout entier naturel non nul compris entre (n+2) et (3n+5)
- pour les entiers (6n+12) et (6n+16) si n est impair
- pour l'entier (6n+14) si n est pair

  Pn est donc la propriété qui dit que pour tout entier naturel non nul appartenant aux intervalles ci-dessus, la conjecture de syracuse est vraie.

INITIALISATION :
(Le site suivant vous montrera que la conjecture de Syracuse est vraie pour tous les entiers nécessaires à l'initialisation, c'est à dire : 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 18, 22, 20 : https://calculis.net/syracuse)

HÉRÉDITÉ :
Supposons Pn vraie pour les intervalles citées ci - dessus. Montrons que Pn+1 est aussi vraie.
C'est à dire que la conjecture de syracuse est vraie pour :

- tout entier naturel non nul compris entre 1 et n+1
- pour tout entier naturel non nul compris entre (n+3) et (3n+8)
- pour les entiers (6n+18) et (6n+22) si n est impair
- pour l'entier (6n+20) si n est pair

Soit pour simplifier il suffit de montrer que les entiers naturels non nul suivants convergeront vers 1 lorsque l'on répétera sur eux les opérations de Syracuse :
n+1 ; 3n+6 ; 3n+7 ; 3n+8 ; 6n+18 et 6n+22 si n est impair et 6n+20 si n est pair.

Le cas de n+1
Si n+1 est pair alors d'après les opérations de Syracuse on le divise par deux, on obtient ainsi un entier compris entre 1 et n. Or d'après l'hypothèse de récurrence, cet entier converge vers 1.
Si n+1 est impair on le multiplie par 3 et on ajoute 1. On obtient donc 3n+4. Or d'après l'hypothèse de récurrence, cet entier converge vers 1.
Le cas de n+1 est donc réglé.

Le cas de 3n+6 ; 3n+7 ; 3n+8
Si n est pair alors 3n+6 et 3n+8 sont pairs, on les divise donc par deux. On obtient ainsi un entier compris entre (n+2) et (3n+5). Or d'après l'hypothèse de récurrence, cet entier converge vers 1.
Cependant 3n+7 est impair. La seule manière de l'obtenir est par un entier pair, qui n'est autre que 6n+14. En effet 6n+14 divisé par deux est égal à 3n+7. *(Pour simplifier, ici on cherche un entier qui selon notre hypothèse convergerait vers 1 et qui durant les opérations qu'il subit "tombe" sur 3n+7)* Or d'après l'hypothèse de récurrence, cet entier (6n+14) converge vers 1 (car n est pair).
Si n est impair alors 3n+7 est pair on le divise donc par deux et on obtient un entier compris entre (n+2) et (3n+5). Or d'après l'hypothèse de récurrence, cet entier converge vers 1
A l'inverse, 3n+6 et 3n+8 sont impairs, la seule manière de les avoir obtenus lors du processus de syracuse est de venir d'un entier pair (que l'on diviserait par deux pour obtenir 3n+6 et 3n+8). Ces deux entiers sont 6n+12 et 6n+16 car (6n+12)/2 = 3n+6 et (6n+16)/2 = 3n+8. Or d'après l'hypothèse de récurrence ces entiers convergent vers 1 car n est impair.
Le cas de 3n+6 ; 3n+7 ; 3n+8 est réglé

Le cas de 6n+18 et 6n+22 si n est impair
- Ces deux nombres sont pairs, on les divise donc par deux, on obtient alors : 3n+9 et 3n+11. Ces deux nombres sont encore pairs car <u>n est impair</u> on les divise donc encore par deux. On obtient deux nombres compris entre n+2 et 3n+5. Or d'après l'hypothèse de récurrence ces entiers convergent vers 1.

Le cas de 6n+18 et 6n+22 si n est impair est réglé

Le cas de 6n+20 si n est pair.
6n+20 est pair, on le divise donc par deux. On obtient 3n+10. Cet entier est encore pair car <u>n est pair.</u> On le divise donc encore une fois par deux. On obtient un entier compris entre n+2 et 3n+5. Or d'après l'hypothèse de récurrence, cet entier converge vers 1.
Le cas de 6n+20 si n est pair est donc réglé.

CONCLUSION
Ainsi, par cette disjonction de cas, l'on a montré que Pn+1 est vrai. On en déduit donc (par l'initialisation et l'hérédité) que la conjecture de Syracuse est vraie pour tout entier naturel non nul.

POSSIBLE PROBLÈME MAJEUR :
Les propriétés de Pn+1 ne sont- elles pas "cachées" dans Pn?