Devoir conçu par Yann Le Brech 2022

Equation Cubique
Introduction à la Méthode de Cardan - Tartaglia
niveau 1ère

Partie 1 :
Equation cubique, recherche de solution par la méthode de Cardan

La forme générale de l'équation cubique, ou équation du troisième degré, s'écrit :

$$AX^3 + BX^2 + CX + D = 0 \qquad \text{(avec } A, B, C \text{ et } D \text{ constantes)}$$

En divisant par A supposé non nul, cette équation se ramène à :

$$X^3 + \frac{B}{A}X^2 + \frac{C}{A}X + \frac{D}{A} = 0$$

que l'on réécrit de manière générique :

$$X^3 + bX^2 + cX + d = 0$$

En faisant le changement de variable : $x = X + \frac{b}{3}$

On peut montrer que l'on se ramène à une équation du type :

$$x^3 + px + q = 0 \qquad \text{(avec } p \text{ et } q \text{ constantes)}$$

Attention : si $x = X + \frac{b}{3}$ alors de manière évidente $X = x - \frac{b}{3}$, qu'il faut reporter dans l'équation précédente afin de trouver cette nouvelle forme.

Cette nouvelle forme de l'équation ne comporte ainsi plus de terme en x^2

Cette expression de l'équation du 3ème degré peut être résolue par la méthode de Cardan.

Cette méthode consiste tout d'abord à écrire x sous la forme d'une somme de deux nombres, c'est-à-dire à poser que : $x = u + v$

On a alors, par substitution :

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

On obtient ainsi une équation à deux inconnues, u et v, on verra par la suite qu'une astuce consistant à bien choisir u et v permet de simplifier le problème.

En développant $(u + v)^3$ dans cette nouvelle équation on obtient :

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) + q = 0$$

Qui peut aussi s'écrire :

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0$$

Ou encore :

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

Maintenant on peut essayer de trouver des nombres u et v qui vérifient la condition supplémentaire suivante :

$$3uv + p = 0$$

En effet cela permet de simplifier cette dernière équation, car on a alors :

D'une part

$$u^3 + v^3 + q = 0$$

Et d'autre part :

$$uv = -\frac{p}{3} \qquad \text{qui donne} \qquad u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \qquad \text{par élévation au cube}$$

Ainsi le couple de nombres u^3, v^3 vérifie les 2 équations suivantes :

$$u^3 + v^3 = -q$$

$$u^3 \times v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

$u^3 \ et \ v^3$ sont donc solutions de l'équation du second degré :

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

<u>Dans le cas où $\Delta > 0$</u> les solutions s'écrivent :

$$X_1 = \frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et } X_2 = \frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}$$

On obtient donc :

$$u^3 = \frac{-q - \sqrt{\mathrm{q}^2 + \frac{4\mathrm{p}^3}{27}}}{2} \quad et \quad v^3 = \frac{-q + \sqrt{\mathrm{q}^2 + \frac{4\mathrm{p}^3}{27}}}{2}$$

Ce qui permet de trouver une solution à l'équation énoncée ci-avant :

$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\mathrm{q}^2 + \frac{4\mathrm{p}^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\mathrm{q}^2 + \frac{4\mathrm{p}^3}{27}}}{2}}$$

Qui, on le rappelle, est racine de l'équation :

$$x^3 + px + q = 0$$

<u>Dans le cas où $\Delta = 0$</u> cela donne :

L'équation du 2nd degré a pour solution unique : $X = \frac{-q}{2}$

Et ainsi on a pour expression d'une racine de l'équation cubique :

$$x = u + v = 2 \times \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$$

<u>Le cas $\Delta < 0$</u> ne sera pas traité ici, il nécessite en effet l'usage des nombres dit "complexes" et "imaginaires" qui ne sont pas des nombres réels, cela sort du cadre de ce travail.

La méthode de Cardan permet donc d'obtenir, le cas échéant, une expression d'une racine de notre équation dans l'ensemble des réels. Il est à noter qu'une équation du troisième degré peut admettre parfois trois racines réelles (ou trois solutions réelles), racines qui peuvent être distinctes ou multiples, et que la méthode présentée ici ne permet d'en obtenir qu'une. (Pour obtenir d'autres racines on fait intervenir à nouveau les nombres complexes, non vus à ce niveau).

Exemple d'application : Dans les exercices et questions on suivra la démarche présentée ci-dessous pour déterminer une solution aux équations, qui est celle décrite ci-avant appliquée à un cas concret.

Soit l'équation :

$$x^3 - 18x - 35 = 0 \qquad (\acute{e}quation\ \mathbf{1})$$

Il n'y a pas de terme en x^2 , on peut utiliser la méthode de Cardan.

On pose $x = u + v$

L'équation s'écrit :

$$(u+v)^3 - 18(u+v) - 35 = 0$$

Ce qui en développant, donne :

$$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv - 18) - 35 = 0$$

On pose alors : $3uv - 18 = 0$

Ce qui donne : $uv = \frac{18}{3} = 6$

On a donc :

$$u^3 + v^3 = 35 \quad et \quad u^3v^3 = (uv)^3 = 6^3 = 216$$

En posant alors $X_1 = u^3$ et $X_2 = v^3$ on sait que $X_1 + X_2 = 35$ et $X_1 \times X_2 = 216$

$X_1\ et\ X_2$, si ils existent dans l'ensemble des réels, sont ainsi solutions de l'équation :

$$X^2 - 35X + 216 = 0$$

son discriminant est :

$$\Delta = 35^2 - 4 \times 216$$
$$\Delta = 361$$

On a donc :

$$X_1 = \frac{35 - \sqrt[2]{361}}{2} = \frac{35 - 19}{2} = 8$$
$$X_2 = \frac{35 + \sqrt[2]{361}}{2} = \frac{35 + 19}{2} = 27$$

Et ainsi :

$$u^3 = 8$$
$$v^3 = 27$$

Et enfin la solution de l'équation (**1**) trouvée par cette méthode s'écrit :

$$x = u + v = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27}$$

Ce qui donne :

$$x = 2 + 3 = 5$$

5 est une solution de l'équation.

Questions :

1) Considérons l'équation générale :

$$X^3 + bX^2 + cX + d = 0$$

En faisant le changement de variable :

$$X = x - \frac{b}{3}$$

Vérifier que l'on obtient une équation de la forme :

$$x^3 + px + q = 0$$

2) Soit l'équation :

$$x^3 - 36x + 91 = 0$$

Trouver une racine de cette équation en utilisant la méthode de Cardan

3) Soit l'équation :

$$X^3 + 3X^2 - 6X - 36 = 0 \qquad (3)$$

En faisant le changement de variable

$$x = X + \frac{b}{3}$$

Ecrire l'équation simplifiée en x .
Montrer que cette équation s'écrit :

$$x^3 - 9x - 28 = 0 \qquad (3bis)$$

Attention : il faut remplacer X dans l'équation proposée en utilisant l'égalité :

$$X = x - \frac{b}{3}$$

(On déterminera d'abords combien vaut *b* dans ce cas.)

Grâce à la méthode de Cardan, trouver une racine réelle de l'équation simplifiée (3bis).
Puis déterminer une racine réelle de l'équation initiale (3).

4) Considérons l'équation :

$$x^3 - 2x - 4 = 0 \qquad (4)$$

a) Grâce à votre calculatrice, tracer une représentation graphique de la fonction :

$$f(x) = x^3 - 2x - 4$$

- variante (i) :

Reproduire cette courbe sur votre copie.
D'après cette courbe, combien existent-t- ils de racines réelles à l'équation considérée (4) ? Faites une conjecture sur le nombre de solutions réelles.
Pour la suite, on admettra qu'il n'existe qu'une seule solution réelle.

- variante (ii) :

En étudiant les variations de f(x) , montrer que, s'il existe une racine dans l'ensemble des nombres réels à l'équation (4), alors cette solution réelle est unique.
Remarque : on utilisera le fait que (admis) , si une fonction f est telle que f'(x)>0 sur un intervalle I, alors la fonction f est strictement croissante sur I.

b) Trouver une racine évidente de l'équation considérée (4)

c) Grâce à la méthode de Cardan, trouver une autre expression d'une solution réelle de l'équation (4).

En déduire l'égalité suivante :

$$\sqrt[3]{2+\frac{10\sqrt{3}}{9}}+\sqrt[3]{2-\frac{10\sqrt{3}}{9}} = 2$$

Remarque : dans la plupart des cas la méthode de Cardan aboutit, comme lors de la dernière question 4, à une expression de la solution sous forme d'empilements et de somme de racines cubiques et racines carrées. Alors que parfois la solution peut être écrite d'une façon très simple. Cela rend cette méthode peu éclairante dans bien des cas, si ce n'est pour découvrir des égalités étonnantes comme celle-ci au c).

5) En suivant l'exemple de la question 4 et de la remarque précédente, vous proposerez vous-même une équation cubique dont une solution est évidente, et, en résolvant cette équation par la méthode de Cardan, vous en déduirez une égalité de votre invention qui soit similaire à celle trouvée à la fin de la question **4).**

Partie 2 :
Résolution par recherche de racines évidentes et factorisation

On remarque que , si ***y*** est une solution entière de l'équation $ax^3+bx^2+cx+d=0$ avec a, b c et d nombres entiers, alors on a :
$ay^3+by^2+cy+d=0$ ce qui permet d'affirmer que $y\times(ay^2+by+c)=-d$
Dans cette expression ay^2+by+c est un nombre entier, ainsi que $-d$.
On en déduit que dans ce cas *y* est un diviseur du nombre $-d$, et donc de *d ,* lequel est le terme constant de l'équation.
Et ainsi, si une équation à coefficients entiers admet une solution entière, alors celle-ci est à chercher parmi les diviseurs du terme constant *d.*

Exemple d'application :

Soit l'équation $x^3+7x^2+9x-5=0$, que l'on cherche à résoudre.
On cherche d'abord les racines évidentes du polynôme $P(x)= x^3+7x^2+9x-5$

Ce polynôme est à coefficients entiers, donc s'il admet une racine entière, celle-ci est un diviseur du terme constant 5.
Les diviseurs de 5 sont (-1), 1, (-5), 5
On remarque que (-5) est racine de P(x), en effet : $(-5)^3 + 7 \times (-5)^2 + 9 \times (-5) - 5 = 0$

Peut-on alors trouver d'autres racines de P ?
Le théorème de factorisation des polynômes nous permet de dire que, si un nombre x_0 est racine d'un polynôme P, alors ce polynôme peut de mettre sous forme factorisée $P(x) = (x - x_0) \times Q(x)$
Avec *Q(x)* polynôme en *x.*
(-5) est racine de P, donc on peut écrire P sous la forme : $P(x) = \big(x - (-5)\big) \times Q(x)$
Comme P est de degré 3, Q doit être de degré 2. On cherche ainsi à écrire :

$$P(x) = (x + 5)(x^2 + mx + n)$$

Cherchons les nombres m et n.
En développant cette dernière expression on obtient :

$$P(x) = x^3 + (m + 5)x^2 + (n + 5m)x + 5n$$

En conséquence, puisque l'on doit avoir l'identité :

$$x^3 + 7x^2 + 9x - 5 = x^3 + (m + 5)x^2 + (n + 5m)x + 5n$$

On est amené à poser :
$m + 5 = 7$ et $n + 5m = 9$ et $5n = -5$
On trouve alors : $n = -1$ et $m = 2$
Il faut maintenant vérifier que cette identification des coefficients est valable. En développant on constate que :

$$(x + 5)(x^2 + 2x - 1) = x^3 + 7x^2 + 9x - 5$$

Maintenant, comme P(x) est factorisé, pour trouver les autres solutions, il suffit de résoudre :

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

Le discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8$
Les solutions sont donc $x_1 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = -1 + \sqrt{2}$

La liste de toutes les racines de P(x) est ainsi : $\{\ -5\ ;\ -1 - \sqrt{2}\ ;\ -1 + \sqrt{2}\ \}$
Et on a la factorisation : $P(x) = (x + 5)\big(x + 1 + \sqrt{2}\big)(x + 1 - \sqrt{2})$

Questions :

1) Soit l'équation $x^3 + 2x^2 - 10x - 8 = 0$
Chercher les solutions réelles de l'équation et donner une factorisation du polynôme

$$R(x) = x^3 + 2x^2 - 10x - 8$$

2) Soit l'équation $x^3 - 8x + 3 = 0$

a) Chercher les solutions réelles de l'équation et donner une factorisation de

$$S(x) = x^3 - 8x + 3$$

b) Utiliser la méthode de Cardan pour résoudre cette équation.
Que constatez-vous ? La méthode de Cardan permet-elle ici d'obtenir les solutions ?