Solution de l'exercice d'analyse extrait de Calculus , Concepts and contexts par J.Stewart

Henri Vullierme

August 16, 2008

Rotation autour d'un droite inclinée On désigne par C l'arc de la courbe y=f(x) situé entre les points P(p,f(p)) et Q(q,f(q)) et par R la région délimitée par C, par la droite y=mx+b (qui se trouve entièrement sous C) et par les perpendiculaires à la droite en P et en Q.

1. Montrer le l'aire de R est donnée par $R = \frac{1}{1+m^2} \int_p^q [f(x) - (mx+b)][1 + mf'(x)]dx$

2. En déduire une formule pour le volume du solide engendré par la révolution de R autour de la droite y=mx+b.

1) Tout d'abord calculons les équations des deux perpendiculaires à y passant par P et par Q .

On sait que la perpendiculaire à une droite d'équation y=mx+b est une droite d'équation $y = -\frac{x}{m} + d$(on peut le démontrer géométriquement)

Notons g(x) la fonction ayant pour interprétation géométrique la droite perpendiculaire à y , et passant par P(p,f(p))

g(x) a pour équation générale : $g(x) = -\frac{x}{m} + d$, or g passe par P(p,f(p)) donc $f(p) = -\frac{p}{m} + d$ d'où $d = f(p) + \frac{p}{m}$

Donc l'équation de g(x) est : $g(x) = -\frac{x}{m} + f(p) + \frac{p}{m}$

Même raisonnement pour h(x) , la perpendiculaire à y passant par Q:

$h(x) = -\frac{x}{m} + f(q) + \frac{q}{m}$

Déterminons désormais les abscisses $x_1$et x_2 des intersections de ces droites avec y : Il suffit de résoudre les équations $g(x_1) = y(x_1)$(E1) et $h(x_2) = y(x_2)$(E2)

On a donc (E1)<=>$-\frac{x_1}{m} + f(p) + \frac{p}{m} = mx_1 + b$<=>$x_1(m + \frac{1}{m}) = f(p) + \frac{p}{m} - b$ <=>$x_1 = \frac{m(f(p)-b)+p}{1+m^2}$

Idem pour $x_2 = \frac{m(f(q)-b)+q}{1+m^2}$