Somme des inverses des carrés

Le but de ce problème est d'étudier la limite de la suite de terme général
$U_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

A) Expression de U_n à l'aide d'une intégrale

1) Calculer l'intégrale $J = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt$

2) On pose pour tout k $\mathbb{N}^*$: $K = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt$. Montrer que $K = \frac{1}{t^2}$.

3) On pose pour tout $t \in [0;\pi]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos(t) + \cos(2t) + ... + \cos(nt)$.

Déduire des questions précédentes l'égalité $U_n = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) D_n(t) dt$.

B) Etude de l'intégrale $I_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) D_n(t) dt$

1) Démontrer que pour tout $t \in [0;\pi]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

2) Soit g la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $g(0) = -1$ et pour tout $t \in]0;\pi]$ $g(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

Montrer que g est continue en 0.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{\pi} g(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt$.

4) On pose pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $h(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Montrer que h est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et que $h'(x)$ est du signe de $\varphi(x) = x - \tan(x)$. Montrer que h est décroissante sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

5) Démontrer que pour tout $t \in [0;\pi]$ on a $-\frac{\pi}{2} \leq g(t) \leq -\frac{1}{2}$.

6) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $A_n = \int_0^{\pi} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt$. Calculer A_n.

7) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{\pi}{2} A_n \leq I_n \leq \frac{\pi}{2} A_n$. En déduire la limite de la suite (I_n).

C) Limite de la suite (U_n)

Conclure à l'aide des questions précédentes.