

Exercice 1 :

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 , d'une part, et v_1, v_2 , d'autre part, en donnant chaque résultat sous la forme de fraction irréductible.
2. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm), tracer les droites D et Δ d'équations respectives

$$y = \frac{3x+1}{4} \text{ et } y = x.$$

Utiliser ces deux droites pour placer sur l'axe des abscisses les 5 premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) .

3. On considère la suite (s_n) définie pour tout entier naturel n par : $s_n = u_n + v_n$.
 - a. Calculer s_0, s_1, s_2 . A partir de ces résultats, que peut-on conjecturer pour la suite (s_n) ?
 - b. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer la conjecture.
4. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par $d_n = v_n - u_n$.
 - a. Montrer que la suite (d_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
 - b. Donner l'expression de d_n en fonction de n .
5. En utilisant les résultats des questions 3.b. et 4.b., donner l'expression de u_n et de v_n en fonction de n .
6. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent et préciser leurs limites.

Exercice 2 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = -1 ; & u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5 en donnant chaque résultat sous forme de fraction irréductible.
2. On définit les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $a_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ et $b_n = 2^n u_n$.
 - a. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme a_0 .
Exprimer alors a_n en fonction de n .
 - b. Montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme b_0 .
Exprimer alors b_n en fonction de n .
 - c. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
3.
 - a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n$.
 - b. En déduire la limite de $\frac{n}{2^n}$ lorsque n tend vers $+\infty$, puis la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.