

1èreS → TS : Désintégration radioactive, équation différentielle et introduction à la fonction exponentielle

I) Présentation du phénomène de radioactivité

La radioactivité est un phénomène naturel au cours duquel des noyaux atomiques instables se désintègrent et se transforment en des noyaux plus stables.

On dispose d'un échantillon d'un élément radioactif contenant N_0 noyaux au temps $t=0$ et on cherche à déterminer l'évolution du nombre de noyaux radioactifs restants au cours du temps t .

La désintégration d'un noyau est imprévisible, cependant, sur un grand nombre de noyaux, on est capable d'évaluer $N(t)$. C'est un peu comme un lancer de dés : si on lance 600 dés, on ne peut pas dire que le trente-sixième dé donnera un 2, mais on est capable de dire qu'environ 100 dés donneront un 2, la précision du résultat par rapport au nombre de dés lancés aura d'autant plus de chances d'être exacte que ce nombre de dés sera grand. Durant tout ce problème on s'intéressera à un échantillon de carbone 14.

Soit $\Delta t > 0$. La variation du nombre de noyaux entre les instants t et $t + \Delta t$, notée $\Delta N(t)$, est proportionnelle au nombre de noyaux à l'instant t et à Δt : il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $\Delta N(t) = -\lambda N(t)\Delta t$.

Données : $\lambda_{14C} = 1.21 \times 10^{-4} \text{ans}^{-1}$

$$N_0 = 5.87 \times 10^{10} \text{ noyaux}$$

II) Etablissement et résolution approchée d'une équation différentielle par la méthode d'Euler

La fonction N est supposée dérivable par rapport au temps.

1.a. Rappeler la définition de $N'(t)$.

b. Etablir l'équation différentielle suivante : $N'(t) = -\lambda N(t)$ (E) (une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction dérivable et dans laquelle interviennent la fonction et ses dérivées).

c. Quel est le signe de $N'(t)$? Quelles sont les variations de N ? Ce résultat était-il prévisible?

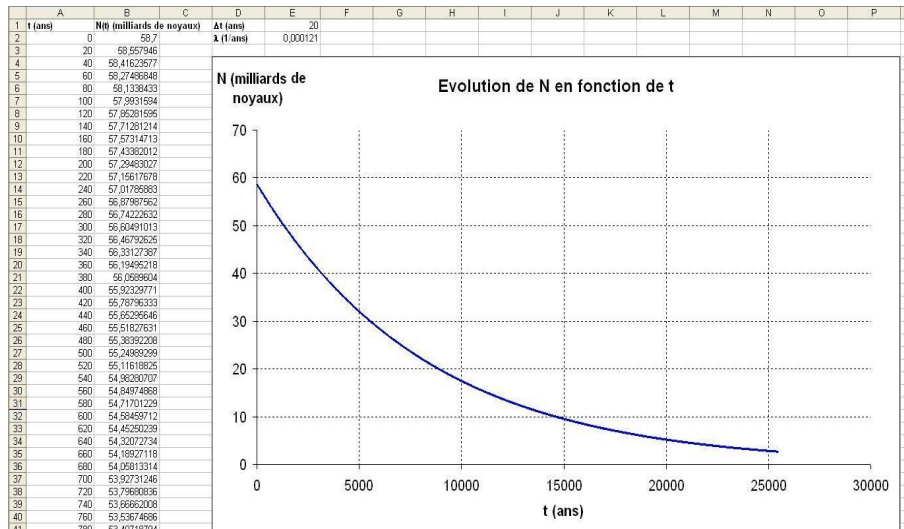
2. On ne peut a priori pas résoudre directement (E) (on ne connaît pour l'instant aucune fonction proportionnelle à sa dérivée). On va résoudre (E) de manière approchée et itérative grâce à la méthode d'Euler.

Rappeler l'expression de l'approximation affine de $N(t + \Delta t)$ en fonction de $N(t)$, $N'(t)$ et Δt .

La méthode d'Euler se base sur cette approximation affine : plus le pas Δt est proche de 0, meilleure est l'approximation. Si on connaît $N(t)$, on peut calculer $N(t + \Delta t)$, on peut donc calculer $N((t + \Delta t) + \Delta t) = N(t + 2\Delta t)$ et ainsi de suite.

3. On prend $\Delta t = 20$ ans. Déterminer N de manière numérique au bout de 20 ans, de 40 ans. Expliquer comment faire pour obtenir, à l'aide d'un tableur, une série de valeurs de $N(t)$ en fonction de t lorsque t varie de 20 ans en 20 ans. Comment faire pour augmenter la précision?

Voici les résultats obtenus à l'aide d'un tableur (jusqu'à $t=25460$ ans) :



4.a. Vérifier graphiquement le résultat de II.1.c. Quelle semble être $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$? Était-ce prévisible?

b. A partir de quel temps $t_{1/2}$ N a diminué de moitié par rapport à $t=0$ (la valeur théorique pour le carbone 14 est $t_{1/2}(th) = 5730$ ans)?

c. Montrer que l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe de $N(t)$ en 0 avec l'axe des abscisses est $\tau = \frac{1}{\lambda}$. Calculer τ numériquement, vérifier graphiquement le résultat.

III) Introduction à la fonction exponentielle

Comme nous l'avons vu, il semble donc intéressant de connaître des fonctions proportionnelles à leurs dérivées, ce qui permettrait de résoudre le II de manière formelle, à l'aide de fonctions connues.

Commençons par chercher une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que (S) : $\begin{cases} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

On admet que (S) admet une unique fonction solution. On l'appelle fonction exponentielle, on la note "exp".

1. Premières propriétés de la fonction exponentielle.

On rappelle que toute fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est nulle est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

a. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$. Justifier que g est dérivable et calculer $g'(x)$. En déduire une expression simple de g . Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ (on admettra qu'une fonction dérivable et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$).

b. Soit $y \in \mathbb{R}$ un réel fixé, soit h la fonction de x définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \exp(x+y) \times \exp(-x)$. Justifiez la dérivabilité de h , calculez $h'(x)$ et en déduire une expression simple de $h(x)$. Ce raisonnement étant valable pour tout $y \in \mathbb{R}$, démontrez que pour tous réels x et y , $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

c. A l'aide des deux questions précédentes, montrer que pour tous réels x et y , $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

On a donc démontré que l'exponentielle transforme les sommes en produits. Pour tous réels $x_1, x_2, \dots, x_n$, on a donc $\exp(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \dots \times \exp(x_n)$. En prenant $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$, il vient $\exp(x + x + \dots + x) = \exp(x) \times \exp(x) \times \dots \times \exp(x)$, c'est à dire $\exp(nx) = \exp(x)^n$.

On pose $e = \exp(1)$. On remarque que l'on a les mêmes relations avec les exponentielles qu'avec les puissances, en particulier, pour tout entier n et $x \in \mathbb{R}$, $\exp(n) = \exp(1 \times n) = \exp(1)^n = e^n$.

Il est donc légitime de poser, pour tout réel x , $\exp(x) = e^x$.

On a ainsi montré que pour tous réels x et y , pour tout entier n , on avait $e^x > 0$, $e^{x+y} = e^x \times e^y$, $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $e^{nx} = (e^x)^n$. De plus, les nombres $e^{1.2}$, $e^{\sqrt{2}}$, e^π ont désormais un sens : $\exp(1.2)$, $\exp(\sqrt{2})$, $\exp(\pi)$.

2. Vers une représentation graphique.

a. A l'aide de III.1.a, montrer que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. Calcul approché de e .

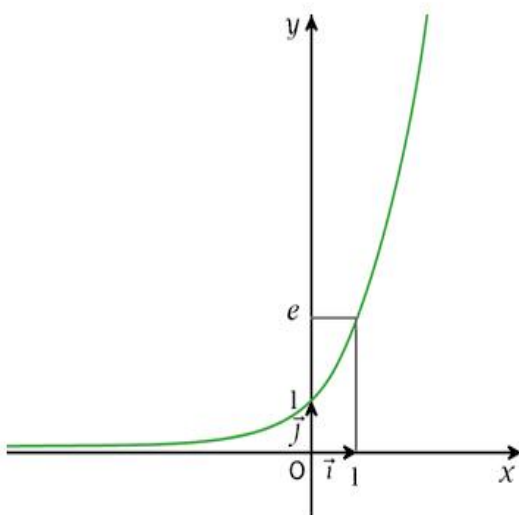
Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et h "proche de 0" on a $e^{a+h} \approx (h+1)e^a$ (on utilisera la méthode d'Euler). En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $e^{nh} \approx (1+h)^n$.

On veut calculer e de manière approchée, on va donc approximer la fonction exponentielle en 1. On pose donc $nh=1$. Montrer que $e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ lorsque n est "suffisamment grand". On a $e \approx 2.71828\dots$

c. Soit k la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $k(x) = e^x - (x+1)$. Etudier les variations de k sur $]0; +\infty[$, calculer $k(0)$ et en déduire que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $e^x > x+1$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$.

En utilisant la formule $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$.

Voici la représentation graphique de la fonction exponentielle :



3. Application à la résolution de II.

Vérifier que la fonction $N : t \mapsto N_0 e^{-\lambda t}$ est solution de l'équation différentielle $N'(t) = -\lambda N(t)$ et que $N(0) = N_0$. Comparer le graphique approché obtenu au II et la courbe représentative de la fonction ci-dessus.

Remarque : on aurait pu travailler dans la question III.2.b. de manière plus rigoureuse sans utiliser les approximations ni les termes "proche de 0" et "suffisamment grand", mais on a procédé de telle manière pour ne pas alourdir l'exposé.