# II. Applications

## 1. Carré scalaire et distance

a) Puisque pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$, alors pour trois points A et B du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$$

b) Conséquence : démontrer que $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ (sans utiliser la première formule)

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{v}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

De même, $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

---

*Exemple* Soit I milieu de [AB].

Démontrer que pour tout point M du plan, $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}$

$$MA^2 - MB^2 = \|\overrightarrow{MA}\|^2 - \|\overrightarrow{MB}\|^2 = \|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\|^2 - \|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\|^2$$

$$= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 - (MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + IB^2)$$

$$= 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}$$

$$= 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB})$$

$$= 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}$$

---

## 2. Orthogonalité

Définition : $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CD}$ si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaire.

Propriété : $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CD}$ si et seulement si : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

---

Démonstration : voir cours

---

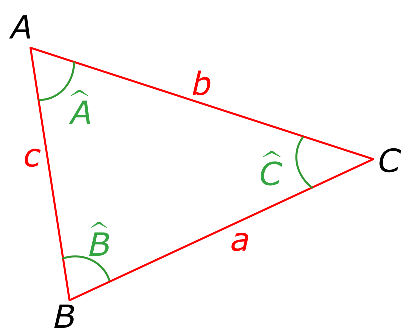
## 3. Relation métrique dans un triangle

Notation : dans un triangle ABC, on note :

$a = BC$ $\quad \hat{A} = \widehat{BAC}$

$b = AC$ $\quad \hat{B} = \widehat{ABC}$

$c = AB$ $\quad \hat{C} = \widehat{ACB}$



Relation d'Al Kashi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\widehat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\widehat{B}$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba.\cos\widehat{C}$$

---

Démonstration : voir cours

---

Aire du triangle

$$A = \frac{1}{2}bc.\sin\widehat{A}$$
$$A = \frac{1}{2}ac.\sin\widehat{B}$$
$$A = \frac{1}{2}ab.\sin\widehat{C}$$

---

Démonstration : voir cours

---

Enfin, si on divise les trois membres par $\frac{abc}{2}$, on obtient :

$$\frac{A}{\frac{abc}{2}} = \frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}$$

---

*Exemple* ABC est un triangle tel que : AB = 4, AC = 5, $\widehat{A} = 30°$
Calculer BC.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\widehat{A}$$
$$a^2 = 25 + 16 - 2.20.\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$a^2 = 41 - 20\sqrt{3}$$
$$a = 2,5$$

---

Théorème de la médiane

Si I est le milieu de [BC] alors : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

---

Démonstration : voir cours