PUISSANCE DE 2 DANS $u_n = \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$

Question 1. *Montrer qu'il existe une infinité de puissance de 2 dans la suite* $u_n = \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$.

Résolution 1.

Définissons $\varphi(n) \equiv \lfloor n\sqrt{2} \rfloor - 2^p$ pour $p \in \mathbb{N}$. Du fait que $2^p \in \mathbb{N}$ et des propriétés de la fonction partie entière sur les entiers, on peut écrire $\varphi(n) = \lfloor n\sqrt{2} - 2^p \rfloor$.

Nous sommes intéressés à trouver les solutions en n pour cette équation lorsque $\varphi(n) = 0$. Cela implique que (en tenant compte du fait que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$):

$$0 < n\sqrt{2} - 2^p < 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{2^p}{\sqrt{2}} < n < \frac{2^p + 1}{\sqrt{2}}$$

Un tel entier n existe si et seulement si les parties entières de chacune des bornes de n trouvées ci-dessus ne sont pas égales. Ainsi a-t-on :

$$n = \delta(p) \left\lfloor \frac{2^p + 1}{\sqrt{2}} \right\rfloor \text{ avec } \delta(p) = \left\lfloor \frac{2^p + 1}{\sqrt{2}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2^p}{\sqrt{2}} \right\rfloor$$

avec la convention que si on trouve $n = 0$ pour un p différent de $p \to -\infty$, alors $\varphi(0) \neq 0$. On montre facilement que $\delta(p) \in \{0, 1\}$. $\left\lfloor \frac{2^p+1}{\sqrt{2}} \right\rfloor$ étant non nul pour la plupart des $p \in \mathbb{R}$, on remarque que notre problème revient considérer sur quels intervalles de p on a $\delta(p) = 1$. Il existerait une infinité de puissance de 2 dans la suite des u_n si n n'est pas borné supérieurement, ce qui est possible uniquement si $\delta(p)$ ne devient pas nul à partir d'un certain p (pour p entiers).

On a que la fonction dérivée de la fonction partie entière suit correspond ce qu'on appelle le *peigne de Dirac* et qu'on peut définir d'une façon générale comme étant :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lfloor f(x) \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \notin \mathbb{Z} \\ a & \text{si } f(x) \in \mathbb{Z},\ a \neq 0 \end{cases}$$

Si on pense à présent p comme étant une variable pouvant prendre n'importe quelle valeur réelle, on peut appliquer cette définition de la dérivée à $\delta(p)$ et, en appliquant les

Date: 22 juin 2009.

conditions aux arguments de $\delta(p)$, on peut exprimer p en fonction d'une autre variable $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$p = \log_2 x + \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(p) = \begin{cases} a & \text{si } x \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}} \mod 1,\ a \neq 0 \\ -a & \text{si } x \equiv 0 \mod 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Sachant que $\delta(p) = 0$ pour $x \to 0$, on en déduit que

$$\delta(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left]\alpha - 1,\, \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\right],\ \alpha \in \mathbb{N}^* \\ 1 & \text{si } x \in \left]\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}},\, \alpha\right] \end{cases}$$

Il s'agit donc essentiellement aussi des intervalles de p pour lesquels n est non nul. Notre problème initial revient donc à déterminer s'il existe un α_0 tel que $\forall \alpha > \alpha_0$, $\nexists x \in \left]\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}},\, \alpha\right]$ pour lequel $p \in \mathbb{N}$.

On peut se convaincre de l'inexistence d'un tel α_0 en considérant la demi-droite ouverte correspondant $x \in \mathbb{R}_+^*$ dans le plan xp. Cette demi-droite est séparée en une infinité d'intervalles alternés ne pouvant prendre que deux valeurs : $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Soit un $x = \beta$ pour lequel $p = \log_2 \beta + \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$. On considère maintenant un $p' = p + d$, $d \in \mathbb{N}^*$. Le $x = \gamma$ correspondant p' est $\gamma = 2^d \beta$. Peu importe dans quel type d'intervalle β se trouve, il est toujours possible de trouver un d arbitrairement grand pour que γ soit dans l'intervalle de notre choix.

Ainsi, l'inexistence d'un α_0 implique qu'il existe une infinité de valeurs entières p pour lesquelles n est un entier non nul et non borné supérieurement, donc il existe une infinité de puissance de 2 dans $\{u_n\} = \{\lfloor n\sqrt{2} \rfloor\}$.