# PROBLÈME

**Notation 1.** *Soit $M \in \mathbb{N}$. $M$ s'écrit décimalement*

$$M = (a_i)_{i=1}^{n} = (a_1)(a_2)...(a_n)$$

*où $a_i \in \mathrm{C}_{10}\ \forall\, i,\ \mathrm{C}_{10} = \{0, 1, 2, ..., 9\}$.*

**Définition 1.** *Soit $M \in \mathbb{N}$ tel que*

$$M = (a_i)_{i=1}^{n}$$

*où $a_i$ est élément d'un ensemble de chiffres $\mathrm{C}_\alpha$ permettant d'écrire $M$ d'une certaine façon $\alpha$. On définit la fonction $\sigma$ comme suit :*

$$\sigma_\alpha(M) = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

**Lemme 1.** *Le nombre $M \in \mathbb{N}$ auquel on soustrait la somme des nombres qui le composent décimalement est un multiple de 9. Cela revient à écrire :*

$$M - \sigma_{10}(M) \equiv 0[9]$$

Preuve : On a que $M = (a_i)_{i=1}^{n}$ pour $a_i \in \mathrm{C}_{10}$. On remarque bien que si $M = 0$, alors $M \equiv 0[9]$. Supposons donc que le lemme soit vrai pour un certain $M$ et montrons que cela implique la véracité du lemme pour le nombre $M + 1 = (b_i)_{i=1}^{p}$ pour $b_i \in \mathrm{C}_{10}$.

Soit $k \in \{1, ..., n\}$ tel que $a_k < 9$ et $\forall\, i > k$, $a_i = 9$. Ainsi, $a_i = b_i\, \forall\, i \in \{1, ..., k-1\}$, $b_k = a_k + 1$, $b_i = 0$ pour les autres.

$$\begin{aligned}
M + 1 - \sigma_{10}(M + 1) &= M + 1 - \sum_{i=1}^{p} b_i = M + 1 - \sum_{i=1}^{k-1} b_i - b_k - \sum_{i=k+1}^{p} b_i \\
&= M - \sum_{i=1}^{k-1} a_i - a_k - \sum_{i=k+1}^{n} a_i + 9(n-k) = M - \sum_{i=1}^{n} a_i + 9(n-k) \\
&= M - \sigma_{10}(M) + 9(n-k) \equiv 0[9]
\end{aligned}$$

CQFD

**Corollaire 1.** *N'importe quelle somme de nombres bâtis à partir des chiffres de $M$, sans répétition, une fois soustraite à $M$, donne un multiple de 9.*

---

*Date*: 9 janvier 2009.

**Généralisation 1.** *Du lemme précédent, vu la façon dont nous avons procédée, on peut aussi dire pour les mêmes raisons que si* $M = (a_i)_{i=1}^n$ *pour* $a_i \in \mathrm{C}_\alpha$*, alors*

$$M - \sigma_\alpha(M) \equiv 0[\alpha - 1]$$

*en utilisant* $a_k < \alpha - 1$ *et* $\forall i > k$, $a_i = \alpha - 1$ *dans la démonstration.*