f est la fonction définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-1\ ;1\}$ par :

$$f(x) = |x+1| + \frac{x}{x^2-1}.$$

$\mathcal{C}$ est sa courbe représentative dans un repère donné.

1. **a)** Donnez une écriture de $f(x)$ sans valeur absolue.

b) Étudiez les limites de f aux bornes des intervalles de $\mathcal{D}_f$.

2. **a)** Exprimez $f'(x)$ et étudiez le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles de $\mathcal{D}_f$.

b) Dressez le tableau de variations de f.

3. **a)** Vérifiez que les droites d'équations $y = x+1$ et $y = -x-1$ sont asymptotes obliques à $\mathcal{C}$ respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.
Étudiez la position de $\mathcal{C}$ par rapport à ses asymptotes.

b) Trouvez une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0. Étudiez la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T.

c) Tracez T, les asymptotes puis $\mathcal{C}$.

4. En utilisant une propriété des fonctions continues et monotones sur un intervalle que vous préciserez, démontrez que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique sur l'intervalle $]-1\ ;1[$ et donnez un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.