Voilà ce que j'ai fait.

Exercice 1 :

Partie A.

1) g'(x)=g(x) et g(0)=1

Donc g'(0)=g(0)=1

Par définition du nombre dérivé, la dérivée est la limite du taux d'accroissement $\frac{g(h)-g(0)}{h-0}$

Donc lim (h->0) $\frac{g(h)-g(0)}{h-0}$ =g'(0)=1

La solution de l'équation différentielle g'(x)=g(x) et telle que g(0)=1 est la fonction h->e^{h}, qui est dérivable sur 0. Donc son taux de variation $\frac{e^{h}-e^{0}}{h-0}$ a pour limite la nombre dérivé de h->e^{h} en 0, soit g'(0)= lim (h->0) $\frac{e^{h}-e^{0}}{h-0}$ = lim (h->0) $\frac{e^{h}-1}{h}=1$

2) $f(x)=\frac{x}{e^{x}-1}=\frac{1}{e^{x}-1 / x}$

D'après la question 1, lim (x->0) $\frac{e^{x}-1}{x}=1$

lim (x->0) 1=1

lim (x->0) $\frac{e^{x}-1}{x}=1$ => lim $\frac{1}{\frac{e^{x}-1}{x}}=\frac{x}{e^{x}-1}=1$

donc la limite de la fonction f en 0 est de 1

3) De la même façon, on trouve que la limite de f en + infini est de 0.

Partie B.

1) Grâce à la formule de $u0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, on obtient le résultat qu'il faut trouver, après quelques calculs, puisque c'est une suite géométrique de raison $e^{\frac{1}{n}}$

Et après encore d'autre calculs, j'obtiens bien le résultat trouvé.

2) On a lim (n->+infini) f(1/n)=1(car lim 1/n=0 alors 1/n->0)

Donc lim Un= lim(e-1)f(1/n)=(e-1)*1=e-1

Exercice 2 :

a. Vrai en – infini

Car lim(x->-inf) $\frac{x}{e^x+1} = -\inf$ =x (car x->-inf)

Lim (x->-inf) 2=2 => donc lim f(x)=x+2

b. Faux.

g'(x)=-x e^x

e^x >0 donc g'(x) est du signe de –x, donc g'(x) positif et g(x) croissant sur R- et inversement sur R+

c.Faux

f'(x)= $\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$ (après plusieurs calculs) or (e^x+1)² >0 donc f'x) est du signe de g(x)

d. Vrai

Après plusieurs calculs, on obtient g(a)=0 ⇔ $e^a + 1 = a e^a$

Donc f(a)= $\frac{1}{e^a} + 2$ = $e^{-a} + 2$ (après quelques calculs)

(or $e^a + 1 = a e^a$; a= 1+e^{-a})

Donc $e^{-a} + 2$ =$e^{-a} + 1 + 1$=a+1

Exercice 3 :

1) La fonction fk est définie sur R. Or R est symétrique par rapport à 0, et donc pour tout réel x : f(-x)= $e^{-k*(-x)^2}$ or x²=(-x)²

Donc $e^{-k*(-x)^2}$ =e^{-k*x^2} donc f(-x)=f(x) donc f(x) est paire.

2) f'(x)=-2kxe^{-k*x^2}

$e^{-k*(-x)^2}$ >0 donc f'(x) est du signe de -2x

Sur R-, f'(x) positif, donc f(x) est croissant, sur R + c'est l'inverse.

3) f''(x)=(-2k+4k²x²)e^{-k*x^2}

Comme la fonction e^{-k*x^2} n'est jamais nulle, et donc e^{-k*x^2}>0, il faut résoudre l'équation

(-2k+4k²x²)=0 et on obtient x= $\sqrt{\frac{1}{2k}}$ (car k>0)

4) fk(x)<fh(x)

e^{-k*x^2} < e^{-h*x^2}

-kx²<-hx²

-kx²/x²<-h

-k<-h

k>h

5) Pour f''k(x)=0, x= $\sqrt{\frac{1}{2k}}$

Donc pour f ''1/2(x)=0 ; $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2*\frac{1}{2}}}$ =1 ou $\alpha =$ -racine de 1

Y=f'1/2(α)(x- α)+f1/2(α)

(or après des calculs, f'1/2(α)= - $e^{-1/2}$ et f1/2(α)= $e^{-1/2}$)

Donc y= - $e^{-1/2}$ (x- α) + $e^{-1/2}$

Y= -x $e^{-1/2}$ + $e^{-1/2}$ + $e^{-1/2}$

Y= -x $e^{-1/2}$ +2 $e^{-1/2}$

Donc y est une équation de la tangente à la courbe représentative de f(1/2) au point d'abscisse α .