Exercice I

On munit le plan affine $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé (O ; $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$). Soit S la courbe d'équation

$$y = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{2}$$

1. Quelle est la nature de S ?
2. Pour tout couple (u, v) de nombres réels, on note U le point de coordonnées (u, v), et pour tout x dans $\mathbb{R}$ on note $M(x)$ le point de S d'abscisse x. On pose

$$f_U(x) = UM(x) \quad , \quad g_U(x) = |f_U(x)|^2$$

   (a) Calculer g_U , g'_U et g''_U. Résoudre l'équation $g''_U(x) = 0$.

   (b) Donner le tableau de variation de f_U.
   (On ne cherchera pas à calculer explicitement le ou les nombres réels où f_U admet un extremum relatif).

3. On dira qu'un cercle C de centre U et de rayon UM est tangent à S si M est un point de S et si les tangentes en M à C et S coincident..

   Soit U un point du plan n'appartenant âs à S, et soit a dans $\mathbb{R}$.

   Montrer que le cercle de centre U et de rayon $UM(a)$ est tangent en $M(a)$ si et seulement si $g'_U(a) = 0$.

4. (a) Montrer que tout point n'appartenant pas à S est centre d'au moins un et d'au plus 3 cercles tangents à S.

   (b) Pour U n'appartenant pas à S, on note $n(U)$ le nombre de réels x pour lesquels le cercle de centre U et de rayon $UM(x)$ est tangent en $M(x)$ à S.
   Pour $1 \leq i \leq 3$, caractériser par une égalité ou une inégalité simple l'ensemble des points U n'appartenant pas à S tels que $n(U) = i$.
   On pourra être amené à discuter selon le signe de $81u^2 - 16v^3$.
   Faire un croquis représentant S et les ensembles trouvés.

5. (a) Soit a dans $\mathbb{R}$. On note $D(a)$ la tangente en $M(a)$ à S. Donner une équation de $D(a)$.

   (b) On note de nouveau U le point de $\mathcal{P}$ de coordonnées (u, v).
   Discuter en fonction de u et v l'ensemble des solutions de l'équation $U \in D(a)$

   (c) On suppose que l'équation $U \in D(a)$ admet deux solutions distinctes a_1 et a_2.
   Montrer que, si $UM(a_1) = UM(a_2)$ alors on a $u = 0$.

   (d) Soit $U \in \mathcal{P}$. On suppose maintenant qu'il existe un cercle de centre U tangent à S en deux points distincts M et N de S.
   Montrer que les tangentes à S en M et N sont concourantes, et que si l'on note V leur point d'intersection on a $VM = VN$.

   (e) Déterminer l'ensemble des points U n'appartenant pas à S pour lesquels il existe un cercle de centre U tangent à S en deux points distincts de S

Exercice II

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O ; $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$).

   On considère un triangle ABC dont aucun côté n'est parallèle à l'axe des ordonnées Oy.

   A toute droite $\mathcal{D}$ non parallèle à Oy, on associe les points A', B' et C' intersections de $\mathcal{D}$ avec les parallèles à Oy menées par A, B et C respectivement.

   Montrer qu'il existe une unique droite $\mathcal{D}$ pour laquelle la somme s des longueurs $AA' + BB' + CC'$ est minimale, et la caractériser.

2. Montrer qu'il existe une droite $\mathcal{D}$ pour la somme s_1 des distances de A, B et C à $\mathcal{D}$ est minimale.

   Montrer que cette droite est unique si ABC n'est pas isocèle, et la caractériser.

Exercice III

Mon boucher ne compte jamais les centimes.
Par exemple, j'ai pris 300g de filet à 34,3 euros le kilo, 240g de viande hachée à 8,6 euros le kilo, et 640g de blanc de poulet à 12,99 euros le kilo: j'ai payé 10 euros pour le filet, 2 euros pour la viande hachée et 8 euros pour le poulet, soit 20 euros en tout.

1. En ramassant deux tickets tombés par terre, le boucher lit:

   - 750g de côtelettes, 250g de rôti. Total : 18 euros;

   - 250g de côtelettes, 500g de rôti. Total : 17 euros.

   Quels peuvent être les prix possibles pour le kilo de côtelletes et le kilo de rôti (on donnera toutes le solutions) ?

2. Pourquoi est-ce que la donnée de tous les tickets de la journée ne peut en aucun cas permettre de déterminer le prix exact de chacun des produits vendus ?