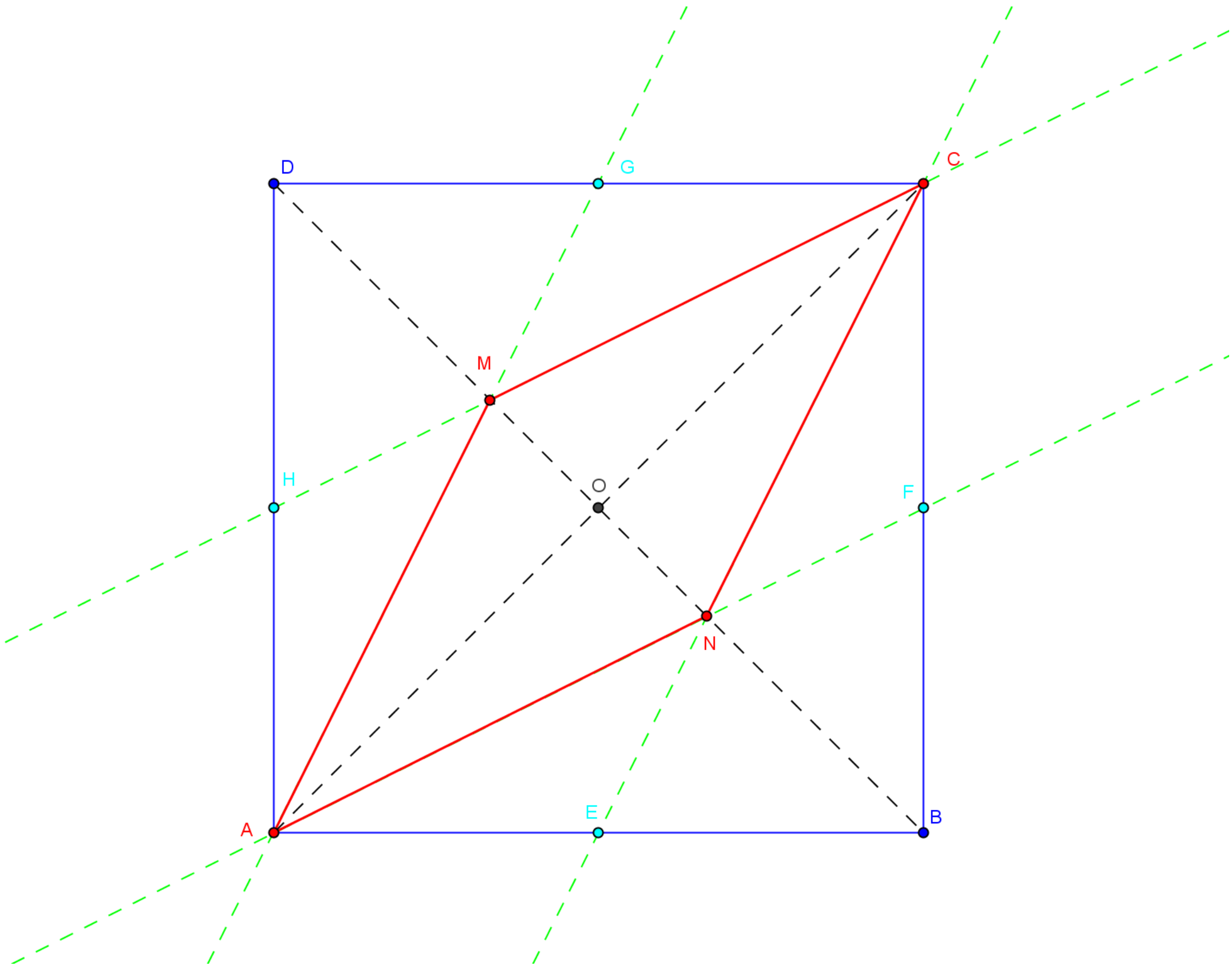

1) On sait que ABCD est un carré

donc AB=AC=BC=BD et (AB) // (CD) et (BC) // (AD)

les points E, F, G et H appartenant respectivement à (AB), (BC), (CD) et (DA), on en conclut que (GC) // (EA) et (AH) // (FC)

2) On sait que G milieu de [CD] et E milieu de [AB]

donc $GC=GD=\frac{DC}{2}=\frac{AB}{2}=AE=EB$

On sait que CG=EA, que (GC) // (EA)

or un quadrilatère ayant deux cotés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme

donc AECG est un parallélogramme, ce qui revient à dire que (AG) // (CE)

comme M $\in$ (AG) et N $\in$ (CE), on peut conclure que (AM) // (CN)

3) On sait que H milieu de [AD] et F milieu de [BC]

donc $AH=HD=\frac{AD}{2}=\frac{BC}{2}=BF=FC$

On sait que AH=FC, que (AH) // (FC)

or un quadrilatère ayant deux cotés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme

donc AHCF est un parallélogramme, ce qui revient à dire que (AF) // (HC)

comme M $\in$ (HC) et N $\in$ (AF), on peut conclure que (CM) // (AN)

4) On constate que dans la quadrilatère AMCN, les cotés opposés sont parallèles

or un quadrilatère dont les cotés sont parallèle entre eux est un parallélogramme donc AMCN est un parallélogramme

5) On introduit le point O, intersection de (AC) et de (BD)
On peut donc ajouter que O est le milieu [AC] et de [BD]

Dans le triangle ADC, on sait que (AG) passe par A et par le milieu de [DC] et que (CH) passe par C et par le milieu de [AD]
or dans un triangle, une droite qui passe par un sommet et le milieu du coté opposé est une médiane.
donc (AG) et (CH) sont des médianes du triangle ADC

Dans le triangle ADC, on sait que (AG) et (CH) sont des médianes se coupant en M. On sait aussi que (DO) est une médiatrice dans le même triangle (car O est le milieu du coté opposé à D)
or dans un triangle, les médiatrices se coupent en un unique point nommé centre de gravité.
donc M est le centre de gravité de ADC et M est sur (DO). On en conclut que M, D et O sont alignés.

6) Dans le triangle ACB, on sait que (AF) passe par A et par le milieu de [BC] et que (CE) passe par C et par le milieu de [AB]
or dans un triangle, une droite qui passe par un sommet et le milieu du coté opposé est une médiane.
donc (AF) et (CE) sont des médianes du triangle ADC

Dans le triangle ACB, on sait que (AF) et (CE) sont des médianes se coupant en N. On sait aussi que (BO) est une médiatrice dans le même triangle (car O est le milieu du coté opposé à B)
or dans un triangle, les médiatrices se coupent en un unique point nommé centre de gravité.
donc N est le centre de gravité de ACB et N est sur (BO). On en conclut que N, B et O sont alignés.

On sait que M, D et O sont alignés, de même que N, B et O
or D, B et O sont alignés (O est le milieu de [BD])
donc M et N appartiennent à (BD)

6) On sait que ABCD est un carré
or les diagonales d'un carré sont perpendiculaires entre elles
donc (AC) est perpendiculaires à (BD)
Comme M et N appartiennent à (BD), on peut conclure que (MN) est perpendiculaire à (AC)

On sait que dans le parallélogramme AMCN, (MN) est perpendiculaire à (AC)
or un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.
donc AMCN est un losange