

Dans ce qui suit, « cas » représentera toujours un résultat de pesée (D pour Droite, G pour Gauche ou E pour Etal à chaque pesée), et « possibilité » représentera toujours une solution possible, c'est à dire l'affirmation que telle boule est soit plus lourde, soit plus légère.

Nombre de boules dont une est de poids différent, en une pesée (facile)

Sans boule neutre	Avec 1 boule neutre supplémentaire
0	1

En deux pesées sans boule supplémentaire :

Supposons que nous ayons N boules, on fait une première pesée de k boules de chaque côté, si cette pesée est étale, il reste (N-2k) boules dont nous ne savons rien et qu'il faut discriminer en une pesée, mais comme nous disposons de 2k boules supplémentaires, nous pouvons résoudre le problème avec 1 boule (cf. supra), donc $N-2k = 1$.

Si la pesée n'est pas étale (supposons qu'elle penche à gauche), il reste 2k boules dont on sait que soit l'une parmi les k premières est plus lourde, soit que l'une des k dernières est plus légère. En une pesée, le nombre maximum de cas est 3 (les 3 cas sont D, G ou E), le nombre de possibilités est $2k \rightarrow 2k < 3$ donc $k = 1$ d'où $N = 3$.

En deux pesées avec boules supplémentaires :

Le nombre de cas est 3^2 (3 cas suivi de 3 cas), or comme la même boule peut être soit plus lourde, soit plus légère, cela donne un maximum de 4 boules. Pour créer les cas, il suffit de créer les cas avec une boule trop lourde, ceux avec une boule trop légère s'en déduisent facilement. Prenons le cas le plus simple, c'est à dire les 3 où la balance penche à gauche lors de la première pesée, et un cas où la première pesée est étale (GG, GE, GD, EG), il est clair qu'avec 3 boules neutres on peut discriminer la bonne boule. Le nombre de boules est donc bien 4 avec 3 boules neutres supplémentaires (c'est loin d'être optimum puisque une boule neutre suffit en fait, mais cela est inutile pour le reste de la démonstration.)

Sans boule neutre	Avec 3 boules neutres supplémentaires
3	4

La formule avec boules supplémentaires est facile à mettre en évidence :

Soit $A(n)$ le nombre de boules que l'on peut discriminer en n pesées, avec des boules supplémentaires. Avec n pesées, le nombre de cas est 3^n soit $(3^n - 1)/2$ boules, il faut donc choisir $(3^n - 1)/2$ cas parmi les 3^n , une solution simple (et loin d'être optimum) est de prendre les premiers, le nombre maximum de boules à mettre dans le même plateau est 3^{n-1} , au maximum on a donc besoin de 3^{n-1} boules neutres. Donc $A(n) = (3^n - 1)/2$. Si l'on appelle $N(n)$ le nombre de boules neutres nécessaires on obtient que $N(n) \leq 3^{n-1}$. Nous verrons que $N(n) = 3^{n-1}$ est acceptable (même si non optimum).

Soit $S(n)$ le nombre de boules que l'on peut discriminer en n pesées. La première pesée de k boules de chaque côté, si elle est étale permet de discriminer $A(n-1)$ boules (si nous disposons d'assez de boules neutres, nous verrons que oui) donc $N-2k = A(n-1)$.

Si la pesée n'est pas étale (supposons qu'elle penche à gauche), il reste 2k boules dont on sait que soit l'une parmi les k premières est plus lourde, soit que l'une des k dernières est plus légère. En (n-1) pesées, le nombre maximum de cas est 3^{n-1} , le nombre de possibilités est $2k \rightarrow 2k < 3^{n-1}$ donc, au maximum, $2k = (3^{n-1} - 1)$ (puisque 2k doit être pair), or ces 3^{n-1} cas sont bien équilibrés (autant de boules à gauche qu'à droite, il suffit de supprimer, le cas avec que des pesées étales), aucune boule supplémentaire n'est utile.

On obtient $N-2k = A(n-1)$ et $2k = (3^{n-1} - 1)$; donc $S(n) = (3^{n-1} - 1) + (3^{n-1} - 1)/2 = (3^n - 3)/2$

Il reste à démontrer que le nombre de boules neutres nécessaire pour peser $A(n-1)$ boules est inférieur au nombre de boules disponibles (c'est à dire le nombre de boules utilisées à la première pesée), c'est à dire que $3^{n-2} \leq (3^{n-1} - 1)$, ce qui est évident.

Pesées	Sans	Avec	Neutre
1	0	1	1
2	3	4	3
3	12	13	9
4	39	40	27
n	$(3^n - 3)/2$	$(3^n - 1)/2$	3^{n-1}