FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES : FICHE DE REVISION

Mohamed Ait Lhoussain

24 mars 2010

1 Quelques exemples de référence :

1.1 Exemple 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{1-e^{xy}}{xy+x^2+1}$
l'ensemble de définition de f est $D = \mathbb{R}^2 \backslash \left\{ \left(x, -\dfrac{x^2+1}{x} \right) / x \in \mathbb{R}^* \right\}$. Géométriquement, D est le plan privé du graphe de la fonction $\phi : t \mapsto -\dfrac{t^2+1}{t}$
D est un ouvert car c'est le complémentaire dans $\mathbb{R}^2$ d'un fermé (essayer de prouver que le graphe de ϕ est un fermé)
f est continue sur D car c'est le rapport de deux fonctions continues sur D et celle du dénominateur ne s'annule jamais sur D.
Une bonne question est de chercher si f se prolonge par continuité en des points de $\Gamma = \left\{ \left(x, -\dfrac{x^2+1}{x} \right) / x \in \mathbb{R}^* \right\}$
Soit $(a,b) \in \Gamma$ donc $a \in \mathbb{R}^*$ et $b = -\dfrac{a^2+1}{a}$
On va montrer par l'absurde que f ne peut pas se prolonger par continuité au point (a,b).
Supposons donc que : $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$.
On a $\forall (x,y) \in D \quad (xy+x^2+1)f(x,y) = e^{xy} - 1$ et comme $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (xy+x^2+1) = 0$ il en résulte que $0\ell = e^{ab} - 1$.
On a $ab = -(a^2+1) \neq 0$, donc $e^{ab} \neq 1$. Absurde.
Ainsi f ne peu être prolongée par continuité en aucun point de Γ.

1.2 Exemple 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{sinon} & \end{cases}$

1. Etudier la continuité de f
2. Montrer que f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
3. f est elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Reponses :
1- Les fonctions $(x,y) \mapsto x^2y$ et $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et comme la deuxiéme fonction ne s'annule jamais sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ alors f considérée comme leur rapport est continue sur U.
Il reste à étudier la continuité de f au point $(0,0)$.
Pour tout $(x,y) \in U$ on a : $|f(x,y)| = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}|y| \leq |y|$ et comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, on a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$
Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2- Les fonctions $(x,y) \mapsto x^2y$ et $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ sont de classe C^1 sur l'ouvert U car elles sont obtenues à partir de fonctions usuelles par les operations usuelles. Comme la deuxième fonction ne s'annule jamais sur U alors f qui est leur rapport est de classe C^1 sur U.
On a pour tout $(x,y) \in U$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2xy(x^2+y^2) - 2x.x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^2(x^2+y^2) - 2y.x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

3- Cherchons d'abord les dérivées partielles au point $(0,0)$ si celles-ci existent :
On a : $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{0}{x} = 0$ Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
Ainsi la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

On va chercher si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue au point $(0,0)$.
Considérons les suites $x_n = y_n = \dfrac{1}{n}$
les deux suites tendent vers 0 lorsque n tends vers $+\infty$.
On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n) = \dfrac{\frac{2}{n^2}}{\frac{4}{n^4}} = \dfrac{1}{2} \neq 0$
Ainsi : $\lim_{n\to+\infty}(x_n,y_n) = (0,0)$ et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n) \neq 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$
Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est discontinue au point $(0,0)$.
Il en resulte que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$
Cependant, il est claire que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U. Donc f est de classe C^1 sur U.

2 EXERCICES MODELES AVEC REPONSE :

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{1-e^{xy}}{xy+x^2+1}$
l'ensemble de définition de f est $D = \mathbb{R}^2 \backslash \left\{ \left(x, -\dfrac{x^2+1}{x}\right) / x \in \mathbb{R}^* \right\}$. Géométriquement, D est le plan privé du graphe de la fonction $\phi : t \mapsto -\dfrac{t^2+1}{t}$
D est un ouvert car c'est le complémentaire dans $\mathbb{R}^2$ d'un fermé (essayer de prouver que le graphe de ϕ est un fermé)
f est continue sur D car c'est le rapport de deux fonctions continues sur D et celle du dénominateur ne s'annule jamais sur D.
Une bonne question est de chercher si f se prolonge par continuité en des points de

$$\Gamma = \left\{ \left(x, -\frac{x^2+1}{x}\right) / x \in \mathbb{R}^* \right\}$$

Soit $(a,b) \in \Gamma$ donc $a \in \mathbb{R}^*$ et $b = -\dfrac{a^2+1}{a}$
On va montrer par l'absurde que f ne peut pas se prolonger par continuité au point (a,b).
Supposons donc que : $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$.

On a $\forall(x,y) \in D \quad (xy+x^2+1)f(x,y) = e^{xy}-1$ et comme $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}(xy+x^2+1) = 0$ il en résulte que $0\ell = e^{ab}-1$.
On a $ab = -(a^2+1) \neq 0$, donc $e^{ab} \neq 1$. Absurde.
Ainsi f ne peu être prolongée par continuité en aucun point de Γ.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$

1. Etudier la continuité de f
2. Montrer que f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
3. f est elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Reponses :
1- Les fonctions $(x,y) \mapsto x^2y$ et $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et comme la deuxième fonction ne s'annule jamais sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ alors f considérée comme leur rapport est continue sur U.
Il reste à étudier la continuité de f au point $(0,0)$.
Pour tout $(x,y) \in U$ on a : $|f(x,y)| = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}|y| \leq |y|$ et comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, on a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$
Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2- Les fonctions $(x,y) \mapsto x^2y$ et $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ sont de classe C^1 sur l'ouvert U car elles sont obtenues à partir de fonctions usuelles par les operations usuelles. Comme la deuxième fonction ne s'annule jamais sur U alors f qui est leur rapport est de classe C^1 sur U.
On a pour tout $(x,y) \in U$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2xy(x^2+y^2)-2x.x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^2(x^2+y^2)-2y.x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

3- Cherchons d'abord les dérivées partielles au point $(0,0)$ si celles-ci existent :
On a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x} = 0$ Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
Ainsi la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

On va chercher si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue au point $(0,0)$.
Considérons les suites $x_n = y_n = \dfrac{1}{n}$
les deux suites tendent vers 0 lorsque n tends vers $+\infty$.
On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n) = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{4}{n^4}} = \dfrac{1}{2} \neq 0$
Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n,y_n) = (0,0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n) \neq 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$
Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est discontinue au point $(0,0)$.
Il en resulte que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$
Cependant, il est claire que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U. Donc f est de classe C^1 sur U.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par : $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{si} \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^3$

Reponse :

Les fonctions $(x,y,z) \mapsto xyz$ et $(x,y,z) \mapsto \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}^3$ sont continues sur $\mathbb{R}^3$ car elles sont obtenues par les operations usuelles et la composition à partir de fonctions usuelles. Et comme la seconde ne s'annule jamais sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ alors la fonction f comme rapport de ces deux fonctions est continue sur U.

Au point $(0,0,0)$:

Pour tout $(x,y,z) \in U$, on a : $|f(x,y,z)| = \dfrac{|z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}|xy| \leq |xy|$

Or : $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |xy| = 0$, donc $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0 = f((0,0,0))$

Ainsi f est continue au point $(0,0,0)$ et par conséquent f est continue sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + y^2 - 1 & \text{si} \quad x^2+y^2 > 1 \\ -\dfrac{x^2}{2} & \text{sinon} \end{cases}$

1- Montrer que $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 > 1 \quad \text{ou} \quad x^2+y^2 < 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$

2- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$

3- Montrer que f est de classe C^1 sur U

4- f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$?

Reponses :

1- On remarque que $U = \mathbb{R}^2 \backslash \Delta$ où Δ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 .

Δ est un fermé de $\mathbb{R}^2$; en effet si $u_n = (x_n, y_n)$ est une suite d'éléments de Δ convergeant vers $\ell = (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell_1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \ell_2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ({x_n}^2 + {y_n}^2) = {\ell_1}^2 + {\ell_2}^2$ et comme $u_n \in \Delta$ on a ${x_n}^2 + {y_n}^2 = 1$. D'où : ${\ell_1}^2 + {\ell_2}^2 = 1$, ce qui veut dire $\ell \in \Delta$. D'après la caractérisation séquentielle des fermés on a prouvé que Δ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et par suite U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$

2- La fonction $(x,y) \mapsto \dfrac{x^2}{2} + y^2 - 1$ est continue sur l'ouvert $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 > 1\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto -\dfrac{x^2}{2}$ est continue sur l'ouvert $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 < 1\}$. Ainsi f est continue sur U.

Il nous reste la continuité en tout point de Δ. Soit alors $\alpha = (a,b) \in \Delta$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $||(x,y) - (a,b)|| < 1$.

Alors : $||(x,y)|| \leq 1 + ||(a,b)|| \leq 2$ (car $a^2 + b^2 = 1$

En particulier,on a : $|x| \leq 2$ et $|y| \leq 2$.

• Si $(x,y) \in U_1$ alors (en tenant compte de : $a^2+b^2 = 1$) , on a :

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(a,b)| &= \left| \frac{x^2}{2} + y^2 - 1 + \frac{a^2}{2} \right| = \left| \frac{x^2}{2} + y^2 - a^2 - b^2 + \frac{a^2}{2} \right| \\ &= \left| \frac{x^2 - a^2}{2} + y^2 - b^2 \right| \end{aligned}$$

de sorte que :

$$
\begin{aligned}
|f(x,y)-f(a,b)| &\leq \frac{1}{2}|x+a||x-a|+|y+b||y-b| \\
&\leq \frac{1}{2}(|x|+|a|)|x-a|+(|y|+|b|)|y-b| \\
&\leq 2|x-a|+4|y-b| \leq 6||(x,y)-(a,b)||
\end{aligned}
$$

(les deux dernières inégalités sont justifiées par : $|x| \leq 2$ et $|y| \leq 2$ et $|a| \leq 2$ et $|b| \leq 2$ obtenues ci-dessus et par le fait que : $\max(|x-a|,|y-b|) \leq ||(x,y)-(a,b)||$)

• si $(x,y) \notin U_1$ alors :

$$
\begin{aligned}
|f(x,y)-f(a,b)| = \left|-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}a^2\right| &\leq \frac{1}{2}(|x|+|a|)|x-a| \\
&\leq ||(x,y)-(a,b)|| \\
&\leq 6||(x,y)-(a,b)||
\end{aligned}
$$

Ceci nous permet de dire que :

$(\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2) \quad ||(x,y)--a,b)|| \leq 1 \Rightarrow ||f(x,y)-f(a,b)|| \leq 6||(x,y)-(a,b)||$

D'où : $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

Exercice 5

Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et soir g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = f(x^2+y^3)$.

1. Prouver que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer ses dérivées partielles.
2. On suppose dans cette question que $f(t) = e^t$. Calculer les dérivées partielles de g
   (a) directement
   (b) En utilisant le résultat de la question 1)

Reponses

1- On a : $g = f \circ h$ avec $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $h(x,y) = x^2+y^3$. Puisque h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ alors la composée f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $m = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors la matrice jacobienne de g au point m est : $J_g(m) = J_f(h(m))J_h(m)$, ce qui donne

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(m) & \frac{\partial g}{\partial y}(m) \end{pmatrix} = f'(h(m)) \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(m) & \frac{\partial h}{\partial y}(m) \end{pmatrix}
$$

D'où : $\frac{\partial g}{\partial x}(a,b) = 2f'(a^2+b^3)a$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) = 3f'(a^2+b^3)b^2$

Ainsi :

$$
(\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2f'(x^2+y^3)x \\ \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 3f'(x^2+y^3)y^2 \end{array} \right.
$$

2- a)- On a alors $g(x,y) = e^{x^2+y^3}$ donc : $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2xe^{x^2+y^3}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 3y^2e^{x^2+y^3}$

b)- . Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a : $f'(t) = e^t$ de sorte que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a : $f'(x^2+y^3) = e^{x^2+y^3}$ et alors d'après 1) : $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2e^{x^2+y^3}x$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 3e^{x^2+y^3}y^2$ ce qui est conforme aux résultats de 2)a) .

Exercice 6

Soit $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et soit φ l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ et on pose $F = f \circ \phi$
Soit $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2)$ tel que $r \neq 0$ et $(x,y) = \varphi(r,\theta)$

1. Exprimer les dérivées partielles de f au point (x,y) en fonction des dérivées partielles de F u point (r,θ) dans le cas où $(x,y) \neq (0,0)$
2. En déduire l'expression du gradient de f en fonction de r et θ
3. On définit la divergence de f au point (x,y) par $\mathrm{div} f(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Exprimer la divergence à l'aide de F,r et θ.

Reponses :
1- Il est claire que F comme composée de f et φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, par conséquent on a la relation suivante entre les matrices jacobiennes :

$$J_F(r,\theta) = J_f(x,y).J_\varphi(r,\theta)$$

Ce qui donne :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) \quad \frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Or pour $r \neq 0$, la matrice carrée de droite est inversible d'inverse : $\dfrac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
Il en résulte que :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) \quad \frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)\right)\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

et par suite : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos\theta\dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) - \dfrac{1}{r}\sin\theta\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin\theta\dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \dfrac{1}{r}\cos\theta\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) \end{cases}$

2- On a alors

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}} f(x,y) = \left(\cos\theta\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)\right)e_1 + \left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)\right)e_2$$

et si pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose : $u(\theta) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ alors :

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}} f(x,y) = \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)u(\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)u'(\theta)$$

3- On a :

$$\mathbf{div}(f(x,y)) = (\cos\theta + \sin\theta)\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - \sin\theta)\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)$$

Exercice7

Soit f de R^3 vers $\mathbb{R}$ de classe C^1 et g définie par $g(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x)$.

1. Prouver que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$
2. Montrer que $\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial z} = 0$

Reponse :
1- $g = f \circ \phi$ avec la fonction ϕ de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ tel que $\phi(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x)$ dont les composantes sont de classe C^1 ϕ est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et comme f est par hypothèses de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ alors g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

2- Pour simplifier posons $X = (x, y, z)$ et u, v, w les composantes de ϕ . D'après les règles de dérivation des composées (qu' on peut retrouver en utilisant les matrices jaobiennes) on a ;

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(X))\frac{\partial u}{\partial x}(X) + \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(X))\frac{\partial v}{\partial x}(X) + \frac{\partial f}{\partial z}(\phi(X))\frac{\partial w}{\partial x}(X) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(X)) - \frac{\partial f}{\partial z}(\phi(X))$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(X))\frac{\partial u}{\partial y}(X) + \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(X))\frac{\partial v}{\partial y}(X) + \frac{\partial f}{\partial z}(\phi(X))\frac{\partial w}{\partial y}(X) = -\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(X)) + \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(X))$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(X))\frac{\partial u}{\partial z}(X) + \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(X))\frac{\partial v}{\partial z}(X) + \frac{\partial f}{\partial z}(\phi(X))\frac{\partial w}{\partial z}(X) = -\frac{\partial f}{\partial y}(\phi(X)) + \frac{\partial f}{\partial z}(\phi(X))$$

En sommant membre à membre les égalités ci-dessus, on trouve la formule demandée.

3 EXERCICES A FAIRE EN S'INSPIRANT DU PARAGRAPHE PRECEDENT

Exercice 1:
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + 3y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Justifier la réponse.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$? Donner la ou les valeurs le cas échéant et justifier la réponse.
3. La fonction f est elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
4. Déterminer les dérivées partielles de f en un point $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.
5. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $F(x,y) = (f(x,y), f(y,x))$. Déterminer la matrice jacobienne de F au point $(1,1)$.

Exercice 2:
On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ d telles que , pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on aie : $f(x,y) = (\sin(xy), y\cos x, xy\sin(xy)\exp(y^2))$ et $g(x,y,z) = xyz$

1. Calculer explicitement $g \circ f$.
2. En utilisant l'expression trouvée en 1), calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.
3. Déterminer les matrices jacobiennes $J_f(x,y)$ et $J_g(u,v,w)$ de f et de g.
4. Retrouver le résultat de la question 2) en utilisant la règle concernant matrice jacobienne de la composée de deux fonctions de classe C^1.

Exercice 3:
$g(x,y) = a(x)f(xv(y), u(x)y)$ avec u et v des fonctions réelles à variable réelle de classe C^1 sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur un ouvert U tel que pour tout $(x,y) \in I^2$ on aie : $(xv(y), u(x)y) \in U$.

1. Montrer que g est de classe C^1 sur l'ouvert $V = I^2$
2. Exprimer les dérivées partielle de g en fonctions de celles de f et des dérivées de a, u et v.

pour les dérivées partielles on trouvera :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(X) = a'(x)f(xv(y), u(x)y) + a(x)\frac{\partial f}{\partial x}(Y)v(y) + a(x)\frac{\partial f}{\partial y}(Y)yu'(x)$$