Calcul de I

Mohamed AL

Par le changement de variable $t = \tan\dfrac{x}{2}$, il vient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{1}{u-\cos x}dx &= \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{u(1+t^2)+t^2-1} \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(u+1)t^2+u-1} \\
&= \frac{2}{u-1}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{u+1}{u-1}t^2}dt \\
&= \frac{2}{u-1}\sqrt{\frac{u-1}{u+1}}\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{u+1}{u-1}}t\right)\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{2}{\sqrt{u^2-1}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{u^2-1}}
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_a^b \frac{\pi}{\sqrt{u^2-1}}du$ peut se calculer en posant $v = \cosh u$ dès lors $dv = \sinh u du$ et $\sqrt{u^2-1} = \sinh u$ et les bornes nouvelles seront $a' = \arg\cosh a$ et $b' = \arg\cosh b$
l'intégrale demandée vaut :

$$I = \iint_{(\Delta)} \frac{1}{u-\cos x}dxdu = \pi(\arg\cosh b - \arg\cosh a)$$

Rappelons que pour tout réel $x \geq 1$ on a

$$\arg\operatorname{ch} x = \ln(1+\sqrt{x^2-1})$$

Il en résulte que :

$$I = \pi \ln\frac{1+\sqrt{b^2-1}}{1+\sqrt{a^2-1}}$$

Sauf erreur bien sûr !!!