<u>Quel est le nombre maximal de solution de l'équation $ax^3+by^3=c$ dans $\mathbb{Z}^2$ avec $(a; b; c)\in\mathbb{Z}^{*3}$?</u>

On considère l'équation $ax^3+by^3=c$ (1) avec $(x ;y)\in\mathbb{Z}^2$ et $(a; b; c)\in\mathbb{Z}^{*3}$

<u>Montrons que l'équation (1) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$ si PGCD(a; b) ne divise pas c :</u>
Donc $\exists(a';b')\in\mathbb{Z}^{*2}$ tel que $a=da'$, $b=db'$ et $PGCD(a';b')=1$
On suppose que (1) admet au moins un couple solution dans $\mathbb{Z}^2$, notons $(x_0; y_0)$ ce couple.
Par conséquent $ax_0^3+by_0^3=c$
D'où $da'x_0^3+db'y_0^3=c \Leftrightarrow d(a'x_0^3+b'y_0^3)=c$
Il en résulte que $d|c$
Par contraposition si d ne divise pas c, alors l'équation (1) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$

Or on s'intéresse au cas où (1) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ puisqu'on recherche le nombre maximal de solution de (1) donc on suppose que $d|c$
Donc $\exists(a';b'; c')\in\mathbb{Z}^{*3}$ tel que $a=da'$, $b=db'$, $c=dc'$ et $PGCD(a';b')=1$
L'équation (1) est donc équivalente à $a'x^3+b'y^3=c'$ et $PGCD(a';b')=1$

<u>Montrons que si l'équation (1) admet une solution dans $\mathbb{Z}^2$, alors (1) admet au maximum 2 solutions dans $\mathbb{Z}^2$:</u>
Soit $(x_0; y_0)\in\mathbb{Z}^2$ un couple solution de (1)
Soit S l'ensemble des couples $(x_S; y_S)\in\mathbb{Z}^2$ solutions de (1)
On a donc $a'x_0^3+b'y_0^3=c'$
Soit $\delta=PGCD(x_0; y_0)$
Donc $\exists(x_0'; y_0')\in\mathbb{Z}^2$ tel que $x_0=\delta x_0'$, $y_0=\delta y_0'$ et $PGCD(x_0'; y_0')=1$
D'où $a'\delta^3x_0'^3+b'\delta^3y_0'^3=c'$
$\Leftrightarrow\delta^3(a'x_0'^3+b'y_0'^3)=c'$
Donc $\delta^3|c'$
Donc $\exists c''\in\mathbb{Z}$ tel que $c'=\delta^3c''$
Il en résulte que $a'x_0'^3+b'y_0'^3=c''$

$PGCD(x_0'; y_0')=1$ donc d'après le théorème de Bézout, il existe un couple $(u;v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $x_0'u+y_0'v=1$

D'où $x_Sx_0'u+x_Sy_0'v=x_S$
On pose $k=x_Su$ et $k'=x_Sv$
On a donc $x_S=kx_0'+k'y_0'$
Il existe donc un couple d'entiers $(k; k')$ tel que $x_S=kx_0'+k'y_0'$

$y_Sx_0'u+y_Sy_0'v=y_S$
On pose $\alpha=y_Su$ et $\beta=y_Sv$
On a donc $y_S=\alpha x_0'+\beta y_0'$
Il existe donc un couple d'entiers $(\alpha; \beta)$ tel que $y_S=\alpha x_0'+\beta y_0'$

Or comme $(x_S; y_S)$ est solution de (1), alors :
$a'(kx_0'+k'y_0')^3+b'(\alpha x_0'+\beta y_0')^3=c'$
$\Leftrightarrow a'(kx_0'+k'y_0')^3+b'(\alpha x_0'+\beta y_0')^3= \delta^3c''$
$\Leftrightarrow a'(kx_0'+k'y_0')^3+b'(\alpha x_0'+\beta y_0')^3= \delta^3(a'x_0'^3+b'y_0'^3)$

$\Leftrightarrow a'(k^3x_0'^3+k'^3y_0'^3+3kk'x_0'y_0'(kx_0'+k'y_0'))+b'(\alpha^3x_0'^3+\beta^3y_0'^3+3\alpha\beta x_0'y_0'(\alpha x_0'+\beta y_0'))=$
$\delta^3(a'x_0'^3+b'y_0'^3)$
$\Leftrightarrow a'k^3x_0'^3+a'k'^3y_0'^3+3a'kk'x_0'y_0'(kx_0'+k'y_0')+b'\alpha^3x_0'^3+b'\beta^3y_0'^3+3b'\alpha\beta x_0'y_0'(\alpha x_0'+\beta y_0'))=$
$\delta^3a'x_0'^3+\delta^3b'y_0'^3$
$\Leftrightarrow (a'k^3+b'\alpha^3-a'\delta^3)x_0'^3+(a'k'^3+b'\beta^3-\delta^3b')y_0'^3+3x_0'^2y_0'(a'k^2k'+ b'\alpha^2\beta)+3x_0'y_0'^2(a'kk'^2+b'\alpha\beta^2)$
$=0$

<u>On procède par identification pour affirmer que :</u>

$$\begin{cases} (a'k^3+b'\alpha^3-a'\delta^3)=0 \\ (a'k'^3+b'\beta^3-\delta^3b')=0 \\ (a'k^2k'+ b'\alpha^2\beta)=0 \\ (a'kk'^2+b'\alpha\beta^2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a'k^3-a'\delta^3=-b'\alpha^3 \\ a'k'^3-\delta^3b'=-b'\beta^3 \\ a'k^2k'=-b'\alpha^2\beta \\ a'kk'^2=-b'\alpha\beta^2 \end{cases}$$

Comme $(\alpha^2\beta)^3=\alpha^6\beta^3$, alors $(-b'\alpha^2\beta)^3=(-b'\alpha^3)^2(-b'\beta^3)$
$\Leftrightarrow (a'k^3-a'\delta^3)^2(a'k'^3-\delta^3b')=(a'k^2k')^3$
Comme $(\alpha\beta^2)^3=\alpha^3\beta^6$, alors $(-b'\alpha\beta^2)^3=(-b'\alpha^3)(-b'\beta^3)^2$
$\Leftrightarrow (a'k^3-a'\delta^3)(a'k'^3-\delta^3b')^2=(a'kk'^2)^3$

<u>On a donc le système suivant :</u>

$$\begin{cases} (a'k^3-a'\delta^3)^2(a'k'^3-\delta^3b')=(a'k^2k')^3 \\ (a'k^3-a'\delta^3)(a'k'^3-\delta^3b')^2=(a'kk'^2)^3 \end{cases}$$

<u>Or on a d'une part :</u>
$(a'k^3-a'\delta^3)^2(a'k'^3-\delta^3b')=(a'k^2k')^3$
$\Leftrightarrow (k^3-\delta^3)^2(a'k'^3-\delta^3b')=a'k^6k'^3$ comme $a'\neq0$
$\Leftrightarrow (k^6+\delta^6-2k^3\delta^3)(a'k'^3-\delta^3b')=a'k^6k'^3$
$\Leftrightarrow a'k^6k'^3+a'\delta^6k'^3-2a'k^3k'^3\delta^3-b'\delta^3k^6-b'\delta^9+2b'k^3\delta^6=a'k^6k'^3$
$\Leftrightarrow a'\delta^6k'^3-2a'k^3k'^3\delta^3-b'\delta^3k^6-b'\delta^9+2b'k^3\delta^6=0$
$\Leftrightarrow a'\delta^3k'^3-2a'k^3k'^3-b'k^6-b'\delta^6+2b'k^3\delta^3=0$ comme $\delta\neq0$

<u>D'autre part :</u>
$(a'k^3-a'\delta^3)(a'k'^3-\delta^3b')^2=(a'kk'^2)^3$
$\Leftrightarrow (k^3-\delta^3)(a'k'^3-\delta^3b')^2=a'^2k^3k'^6$ comme $a'\neq0$
$\Leftrightarrow (k^3-\delta^3)(a'^2k'^6+\delta^6b'^2-2a'b'k'^3\delta^3)=a'^2k^3k'^6$
$\Leftrightarrow a'^2k^3k'^6+\delta^6b'^2k^3-2a'b'k^3k'^3\delta^3-a'^2k'^6\delta^3-\delta^9b'^2+2a'b'k'^3\delta^6=a'^2k^3k'^6$
$\Leftrightarrow b'^2k^3\delta^3-2a'b'k^3k'^3-a'^2k'^6-b'^2\delta^6+2a'b'k'^3\delta^3=0$ comme $\delta\neq0$

<u>On en déduit donc que :</u>
$-b'(a'\delta^3k'^3-2a'k^3k'^3-b'k^6-b'\delta^6+2b'k^3\delta^3)+b'^2k^3\delta^3-2a'b'k^3k'^3-a'^2k'^6-b'^2\delta^6+2a'b'k'^3\delta^3=0$
$\Leftrightarrow -a'b'\delta^3k'^3+2a'b'k^3k'^3+b'^2k^6+b'^2\delta^6-2b'^2k^3\delta^3+b'^2k^3\delta^3-2a'b'k^3k'^3-a'^2k'^6-b'^2\delta^6+2a'b'k'^3\delta^3=0$
$\Leftrightarrow b'^2k^6-a'^2k'^6-b'^2k^3\delta^3+a'b'k'^3\delta^3=0$

$\Leftrightarrow b'^2k^6-a'^2k'^6=b'^2k^3\delta^3-a'b'k'^3\delta^3$
$\Leftrightarrow (b'k^3-a'k'^3)(b'k^3+a'k'^3)=b'\delta^3(b'k^3-a'k'^3)$
$\Leftrightarrow (b'k^3-a'k'^3)=0$ ou $b'k^3+a'k'^3=b'\delta^3$
$\Leftrightarrow b'k^3=a'k'^3$ ou $b'k^3+a'k'^3=b'\delta^3$

<u>Le système est donc équivalent à :</u>
$\begin{cases}(k^3-\delta^3)^2(a'k'^3-\delta^3b')=a'k^6k'^3\\ k^3=a'k'^3\end{cases}$ ou $\begin{cases}(k^3-\delta^3)(a'k'^3-\delta^3b')^2=a'^2k^3k'^6\\ b'k^3+a'k'^3=b'\delta^3\end{cases}$

<u>Résolvons le système</u> $\begin{cases}(k^3-\delta^3)^2(a'k'^3-\delta^3b')=a'k^6k'^3\\ b'k^3=a'k'^3\end{cases}$

$(k^3-\delta^3)^2(a'k'^3-\delta^3b')=a'k^6k'^3$ et $b'k^3=a'k'^3$
$\Leftrightarrow (k^3-\delta^3)^2(b'k^3-\delta^3b')=b'k^9$ et $b'k^3=a'k'^3$
$\Leftrightarrow (k^3-\delta^3)^3=k^9$ et $b'k^3=a'k'^3$ comme $b'\neq0$
$\Leftrightarrow k^9-\delta^9-3k^3\delta^3(k^3-\delta^3)=k^9$ et $b'k^3=a'k'^3$
$\Leftrightarrow -\delta^9-3k^6\delta^3+3k^3\delta^6=0$ et $b'k^3=a'k'^3$
$\Leftrightarrow -\delta^6-3k^6+3k^3\delta^3=0$ et $b'k^3=a'k'^3$ comme $\delta\neq0$
<u>Résolvons l'équation $-\delta^6-3k^6+3k^3\delta^3=0$ d'inconnue k^3 dans IR :</u>
<u>Calculons le discriminant de ce trinôme :</u>
$\Delta=9\delta^6-12\delta^6=-3\delta^6<0$ donc l'équation n'a pas de solution dans IR
Il n'existe donc aucun entier k tel que $(k^3-\delta^3)^2(a'k'^3-\delta^3b')=a'k^6k'^3$ et $b'k^3=a'k'^3$

<u>Résolvons le système</u> $\begin{cases}(k^3-\delta^3)(a'k'^3-\delta^3b')^2=a'^2k^3k'^6\\ b'k^3+a'k'^3=b'\delta^3\end{cases}$

$(k^3-\delta^3)(a'k'^3-\delta^3b')^2=a'^2k^3k'^6$ et $b'k^3+a'k'^3=b'\delta^3$
$\Leftrightarrow (k^3-\delta^3)(-b'k^3)^2=a'^2k^3k'^6$ et $b'k^3+a'k'^3=b'\delta^3$
$\Leftrightarrow (k^3-\delta^3)b'^2k^6=a'^2k^3k'^6$ et $b'k^3+a'k'^3=b'\delta^3$
$\Leftrightarrow (b'k^3-b'\delta^3)b'k^6=a'^2k^3k'^6$ et $b'k^3+a'k'^3=b'\delta^3$
$\Leftrightarrow -a'k'^3b'k^6=a'^2k^3k'^6$ et $b'k^3+a'k'^3=b'\delta^3$
$\Leftrightarrow -b'k'^3k^6=a'k^3k'^6$ et $b'k^3+a'k'^3=b'\delta^3$
$\Leftrightarrow k'^3k^3(b'k^3+a'k'^3)=0$ et $b'k^3+a'k'^3=b'\delta^3$
$\Leftrightarrow k'^3k^3b'\delta^3=0$ et $b'k^3+a'k'^3=b'\delta^3$
Donc comme $b\neq0$ et $\delta\neq0$, alors $k=0$ ou $k'=0$

- <u>Si $k=0$:</u>

$k=0$ et $b'k^3+a'k'^3=b'\delta^3$
$\Leftrightarrow k=0$ et $a'k'^3=b'\delta^3$
D'où $x_S=kx_0'+k'y_0'=k'y_0'$
Donc $a'x_S^3=a'k'^3y_0'^3=b'\delta^3y_0'^3=b'y_0^3$
On en déduit $x_S^3=(b'/a')y_0^3$
Donc x_S est solution si $b'/a'\in\mathbb{Z}$
Or comme PGCD(a';b')=1, alors a'=1 ou a'=-1

$a'k^3-a'\delta^3=-b'\alpha^3$ et $a'k'^3-\delta^3b'=-b'\beta^3$
$\Leftrightarrow a'\delta^3=b'\alpha^3$ et $\beta=0$
D'où $y_S=\alpha x_0'+\beta y_0'=\alpha x_0'$

Donc $b'y_S^3=b'\alpha^3x_0'^3=a'\delta^3x_0'^3=a'x_0^3$
On en déduit $y_S^3=(a'/b')x_0^3$
Donc y_S est solution si $a'/b'\in\mathbb{Z}$
Or comme PGCD(a';b')=1, alors b'=1 ou b'=-1

Il en résulte que $(x_S;y_S)$ est solution si $(a';b')\in\{-1;1\}^2$
<u>On a donc :</u>
Si a'=b', alors $x_S=y_0$ et $y_S=x_0$
Si a'=-b', alors $x_S=-y_0$ et $y_S=-x_0$

- <u>Si k'=0 :</u>

$k'=0$ et $b'k^3+a'k'^3=b'\delta^3$
$\Leftrightarrow k'=0$ et $b'k^3=b'\delta^3$
$\Leftrightarrow k'=0$ et $k^3=\delta^3$ comme $b'\neq 0$
$\Leftrightarrow k'=0$ et $k=\delta$
D'où $x_S=kx_0'+k'y_0'=\delta x_0'=x_0$

$a'k^3-a'\delta^3=-b'\alpha^3$ et $a'k'^3-\delta^3b'=-b'\beta^3$
$\Leftrightarrow \alpha=0$ et $\beta=\delta$
D'où $y_S=\alpha x_0'+\beta y_0'=\delta y_0'=y_0$

<u>Il en résulte que si (1) admet une solution $(x_0; y_0)$, alors elle admet au maximum deux solutions :</u>
$-(x_0; y_0)$
-si $(a';b')\in\{-1;1\}^2$: si a'=b' $(y_0; x_0)$
si a'=-b' $(-y_0;-x_0)$

<u>Montrons qu'il existe $(a; b; c)\in\mathbb{Z}^{*3}$ tel que (1) admette deux solutions dans $\mathbb{Z}^2$:</u>
Soit (2) l'équation $x^3-y^3=1$ avec $(x ;y)\in\mathbb{Z}^2$
Comme (2) est de la même forme que (1), alors elle admet au maximum deux solutions.
Or $0^3-(-1)^3=1$ et $1^3-0^3=1$
Donc l'ensemble des solutions de (2) est $\{(0;-1); (1;0)\}$
Le nombre maximum de solutions de (1) est donc 2.