Ceci n'est pas une démonstration du théorème de Fermat

L'image des maths

Résumé Nous partons de l'équation de Fermat $u^n = x^n + y^n$ et établissons une deuxième équation équivalente. Celle-ci entraîne une égalité qui ne semble vraie que pour $n \leq 2$.

La démonstration Soit l'équation de Fermat $z^n = x^n + y^n$. Avec x et y premiers entre eux et différents. Il est évident qu'alors

$$z^{3n} - x^{3n} - y^{3m} = 3(x^n + y^n)x^n y^n = 3z^n x^n y^n$$

Nous avons alors

$$\frac{x^{3n} + y^{3n}}{z^n} = z^{2n} - 3x^n y^n = x^{2n} + y^{2n} - x^n y^n = \alpha$$

α est un entier. Pour $n = 1$, c'est toujours vérifié. Pour $n = 2$, soit une solution x, y (par ex. $x = 3$, $y = 4$). $x^2 + y^2 = z^2$ divise toujours $x^6 + y^6$ (dans l'exemple $3^6 + 4^6 = 729 + 4096 = 4825 = 193.5^2 = 193(3^2 + 4^2)$). Il n'est pas nécessaire de le démontrer, l'exemple unique donné prouve que c'est possible. Maintenant, soit $n > 2$. D'abord, un résultat

$$x^{3k} + y^{3k} = (x^{2k} + y^{2k} - x^k y^k)(x^k + y^k) \quad (a)$$

En prenant $k = 2n$, $x^{6n} + y^{6n}$ est un multiple de $x^{2n} + y^{2n}$. Soit

$$x^{10n} + y^{10n} = (x^{6n} + y^{6n})(x^{4n} + y^{4n}) + x^{4n} y^{4n}(x^{2n} + y^{2n})$$

c'est un multiple de $x^{2n} + y^{2n}$. Par récurrence $x^{(6+4m)n} + y^{(6+4m)n}$ est un multiple de $x^{2n} + y^{2n}$. Maintenant, si $k = 4n$ dans (a). Alors $x^{12n} + y^{12n}$ est un multiple de $x^{4n} + y^{4n}$. Et, toujours par récurrence $x^{(12+8m)n} + y^{(12+8m)n}$ est un multiple de $x^{4n} + y^{4n}$. Multiplions, nous avons

$$(x^{(6+4m)n} + y^{(6+4m)n})(x^{(12+8m)n} + y^{(12+8m)n}) = \delta(x^{2n} + y^{2n})$$

$$= x^{(18+12m)n} + y^{(18+12m)n} + x^{(6+4m)n} y^{(6+4m)n}(x^{(6+4m)n} + y^{(6+4m)n})$$

. Donc $x^{(18+12m)n} + y^{(18+12m)n}$ est un multiple de $x^{2n} + y^{2n}$. Donc, avec α un entier

$$x^{(18+12m)n} + y^{(18+12m)n} = \alpha(x^{2n} + y^{2n})$$

Et

$$x^{2n}(x^{(16+12m)n} - \alpha) = y^{2n}(\alpha - y^{(16+12m)n})$$

Et $pgcd(x, y) = 1$. Donc, il existe un entier β pour lequel il y a deux cas, le premier

$$\beta x^{2n} = \alpha - y^{(16+12m)n}$$

Et

$$\beta y^{2n} = x^{(16+12m)n} - \alpha$$

Et alors

$$\beta(x^{2n} + y^{2n}) = x^{(16+12m)n} - y^{(16+12m)n}$$

Et c'est impossible, car le membre de droite est premier avec $x^{2n} + y^{2n}$ et n'en est jamais un multiple. Le deuxième cas est

$$x^{2n} = \beta(\alpha - y^{(16+12m)n})$$

Et

$$y^{2n} = \beta(x^{(16+12m)n} - \alpha)$$

Dans ce cas

$$x^{2n} + y^{2n} = \beta(x^{(16+12m)n} - y^{(16+12m)n})$$

Et c'est impossible car le membre de gauche n'est jamais multiple de $x^{(16+12m)n} - y^{(16+12m)n}$. Le calcul aboutit à une impossibilité. La seule solution pour $n > 2$ devrait être

$$xyz = 0$$

Conclusion L'égalité établie à partir de l'équation de Fermat n'a pas permis de démontrer le théorème de Fermat car l'inégalité $n > 2$ n'a pas été utilisée bien que l'on soit arrivé à établir que l'équation de Fermat conduit effectivement à une impossibilité (pour $n > 2$?).