Une relation dans $\mathbb{C}^*$

Jamel Ghanouchi

Résumé Nous considérons dans cette courte démonstration deux nombres complexes x et y et nous prouvons qu'ils obéissent forcément à une égalité.

La démonstration

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^*$$

$$u = x + jy, \quad v = jx + y, \quad j^2 = -1$$

Or

$$u - jv = x + jy + x - jy = 2x$$

$$v - ju = jx + y - jx + y = 2y$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{v - ju}{u - jv} = \frac{j(v - ju)}{j(u - jv)} = \frac{u + jv}{v + ju}$$

$$= \frac{(1-j)u + (1+j)v}{(1+j)u + (1-j)v} = \frac{j(1-j)u + j(1+j)v}{j(1+j)u + j(1-j)v}$$

$$= \frac{(1+j)u + (-1+j)v}{(-1+j)u + (1+j)v}$$

$$\Leftrightarrow ((1+j)v + (j-1)u)((1+j)v - (j-1)u) = ((1+j)u + (j-1)v)((1+j)u - (j-1)v)$$

$$= (1+j)^2 v^2 - (j-1)^2 u^2 = (1+j)^2 u^2 - (j-1)^2 v^2$$

$$\Leftrightarrow ((1+j)^2 + (j-1)^2) v^2 = ((1+j)^2 + (j-1)^2) u^2$$

$$\Leftrightarrow u^2 = v^2 = (x+jy)^2 = (jx+y)^2$$

$$\Leftrightarrow (1-j)(1+j)(x-y)(x+y) = 0$$

Conclusion Donc $\forall x, y \in \mathbb{C}^*$, $(x-y)(x+y) = 0$.