1 - DE L'EQUATION DE PYTHAGORE A CELLE DE FERMAT

Le théorème que Fermat écrit sous forme d'une annotation en marge de son exemplaire du livre d'arithmétique de Diophante de Bachet fait face à la célèbre égalité :

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (1)$$

Ce fait dénote d'une tentative de généraliser l'équation de Pythagore entreprise par Fermat qui a voulu l'étendre à toutes les puissances supérieures à deux.

Alors, posons-nous la question de savoir comment peut-on procéder pour généraliser l'équation (1) c'est-à-dire, comment peut-on obtenir l'équation de Fermat à partir de l'équation de Pythagore ?

A notre sens, on peut procéder de deux manières différentes :

1ère approche : On remplace tout simplement 2 par n et on obtient :

$$a^n + b^n = c^n \qquad (2)$$

2ème approche : On procède par une transformation élémentaire de l'équation (1). En effet :

L'égalité $a^2 + b^2 = c^2$ est équivalente à $(a^{\frac{2}{n}})^n + (b^{\frac{2}{n}})^n = (c^{\frac{2}{n}})^n$

En posant : $x = a^{\frac{2}{n}}$; $y = b^{\frac{2}{n}}$; $z = c^{\frac{2}{n}}$, nous obtenons :

$$x^n + y^n = z^n \qquad (3)$$

A notre avis, la deuxième approche paraît plus intéressante et plus riche en propriétés que la première dans la mesure où elle nous fait entrevoir le lien qui existe entre l'exposant n et le triplet (x, y, z). En effet, quand on change d'exposant le triplet aussi change automatiquement ce qui fait que :

Propriété 1 : *Un même triplet ne peut pas vérifier l'équation de Fermat pour deux exposants différents*.

Cette propriété va pouvoir nous aider par la suite.

2 - LE GRAND THEOREME DE FERMAT

Le grand théorème de Fermat affirme qu'il n'existe pas, pour tout n>2, de triplet (x, y, z) d'entiers naturels distincts et non nuls qui puissent vérifier l'équation (3). Démontrer le théorème de Fermat revient donc à prouver que, pour tout n>2, le triplet ($x = a^{\frac{2}{n}}$, $y = b^{\frac{2}{n}}$, $z = c^{\frac{2}{n}}$) qui vérifie l'équation (3) ne peut pas être un triplet d'entiers. Or, la racine $n^{ième}$ d'un entier est entière si et seulement si cet entier est un produit de puissance $m = kn$ avec $k = 1,2,3,...$

Donc, si (a,b,c) est un triplet d'entiers naturels distincts et non nuls qui vérifient l'équation de Pythagore, alors pour que le triplet ($a^{\frac{2}{n}}, b^{\frac{2}{n}}, c^{\frac{2}{n}}$) soit un triplet d'entiers pour tout n>2, il faudra que:

- n soit un diviseur de 2 c'est-à-dire, $n = 1$ et $n = 2$ ou bien

- il faudra qu'il puisse exister un autre triplet (X,Y,Z) d'entiers naturels distincts et non nuls tels que $a = X^m$, $b = Y^m$ et $a = Z^m$ et qui vérifie l'équation

$$X^{2m} + Y^{2m} = Z^{2m} \qquad (4)$$

L'équation (4), qui est obtenue après avoir remplacé dans l'égalité (1) a par X^m, b par Y^m et c par Z^m, peut aussi s'écrire :

$$(X^m)^2 + (Y^m)^2 = (Z^m)^2 \qquad (5)$$

Donc, pour donner la preuve du théorème de Fermat, il va falloir prouver que le triplet (X^m, Y^m, Z^m) ne peut pas constituer les côtés d'un triangle rectangle. Pour ce faire, analysons l'égalité (4) :

<u>Quand m=1</u>, nous aurons

$$X^2 + Y^2 = Z^2 \qquad (6)$$

L'égalité (6) est vraie puisque, en posant n=1, nous avons: $a = X$, $b = Y$ et $c = Z$. Or, (a,b,c) est un triplet pythagoricien donc, le triplet (X,Y,Z) l'est aussi.

<u>Quand m>1</u>

En vertu de la propriété 1 ci-dessus établie, l'égalité (4) ne pourra plus se vérifier pour les autres valeurs de l'exposant m>1 puisque nous avons un même triplet (X^2,Y^2,Z^2) solution de l'équation de Fermat pour m=1 qui ne peut plus l'être pour aucun autre exposant différent de 1.

<u>On en conclut</u> qu'il n'est pas possible de trouver un couple de paramètres p et q qui puissent permettre d'obtenir un triplet de produits de puissance m ≥ 2 (X^m,Y^m,Z^m) qui soit les côtés d'un triangle rectangle et partant, le triplet ($x = a^{\frac{2}{n}}$, $y = b^{\frac{2}{n}}$, $z = c^{\frac{2}{n}}$) qui vérifie l'équation de Fermat (1), avec a, b et c entiers strictement positifs, ne peut jamais être un triplet d'entiers pour tout n>2.

CQFD.