Théorème de Pythagore: ***Dans un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit***.

Cet énoncé est équivalent à cet autre: ***si x, y et z sont les trois côtés d'un triangle rectangle ayant pour hypoténuse le côté z, alors se vérifie l'égalité***

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (1)$$

DEMONSTRATION

Ici x, y et z sont supposés être trois (03) nombres distincts strictement positifs. L'égalité (1) peut aussi s'écrire:

$$z\left(\frac{x}{z}x + \frac{y}{z}y - z\right) = 0$$

On voit bien que l'expression de gauche ne peut s'annuler que quand l'expression qui est entre parenthèses s'annule. On obtient:

$$x\left(\frac{x}{z}\right) + y\left(\frac{y}{z}\right) = z \qquad (2)$$

Comme x, y et z sont les côtés d'un triangle rectangle, on peut utiliser le théorème des sinus et l'égalité (2), dans ce cas, prendra la forme trigonométrique:

$$x\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right) + y\left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right) = z \qquad (3)$$

Ici, **α** est l'angle entre les côtés y et z; **β** est l'angle entre les côtés x et z; γ celui entre les côtés x et y.

L'angle **γ** est droit et les angles **α** et **β** sont complémentaires c'est-à-dire α+β=90°. Tout ceci aura pour conséquence la simplification de l'égalité (3) qui prendra alors la forme:

$$\boxed{x\sin\alpha + y\cos\alpha = z} \qquad (4)$$

L'égalité (4) peut aussi s'écrire sous la forme plus simplifiée suivante :

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (5)$$

L'égalité (4) n'est autre que le théorème des projections qui énonce ici que, dans un triangle rectangle la somme de la projection orthogonale des côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse est égale à l'hypoténuse. Pour apprécier ce fait, considérons le triangle rectangle **ABC** (**figure n°2**). Abaissons sur **BC** la hauteur issue du sommet **A.** Au point de rencontre avec **BC** on trouve le point **A_2.** On constate que le segment **A_2C** représente la projection du côté **AC** sur **BC** et le segment **A_2B** celle du côté **AB** sur **BC.** Et on peut noter:

$$\begin{aligned} A_2C &= \Pr(AC)_{BC} = x\sin\alpha \\ A_2B &= \Pr(AB)_{BC} = y\cos\alpha \\ BC &= z \\ AC &= x \\ AB &= y \end{aligned} \qquad (6)$$

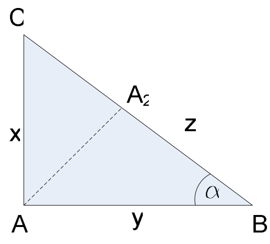

Figure n° 1

La prise en compte de la notation (6) dans l'égalité (4) nous donne:

$$A_2C + A_2B = BC \qquad (7)$$

L'égalité (7) est vraie : C'est la relation de Chasles sur un axe. Cette vérité peut se constatée sur la figure n°1: la longueur du segment **BC** est bien égale à la somme de la longueur du segment **A_2C** et de celle du segment **A_2B**.

CQFD.