• On dit qu'un endomorphisme f est nilpotent d'ordre k s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que :

$$f \circ f \circ \cdots \circ f = f^k = 0 \qquad f^{k-1} \neq 0$$

0 désigne l'endomorphisme nul.

• On dit qu'une matrice carrée A est nilpotente d'ordre k s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que :

$$A^k = \square \qquad A^{k-1} \neq \square$$

$\square$ désigne la matrice dont les éléments sont nuls.

• Si E est un espace vectoriel sur **R** de dimension n, muni d'une base

$$\mathcal{B} = (e_i) \quad 1 \leq i \leq n ,$$

on note $V_1 = \text{Vect}\{e_1\}$ le sous-espace vectoriel engendré par e_1

et pour tout entier i tel que $2 \leq i \leq n$

$V_i = \text{Vect}\{e_1, e_2, \ldots e_i\}$ le sous-espace vectoriel engendré par $e_1, e_2, \ldots e_i$.

• On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients réels.

I

Soit E un espace vectoriel sur **R**, de dimension n, muni d'une base

$$\mathcal{B} = (e_i) \qquad 1 \leq i \leq n$$

Soit f endomorphisme de E défini par $f(e_1) = 0$

et, pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq n$

$$f(e_k) = \sum_{i=1}^{i=k-1} a_{ik} e_i$$

1.1

1.1.1 - Ecrire la matrice A associée à f dans la base $\mathcal{B}$

1.1.2 - Calculer $(f\circ f)(e_1)$, $(f\circ f)(e_2)$

1.1.3 - *Pour tout entier k tel que $3 \leq k \leq n$, calculer $(f\circ f)(e_k)$ et montrer qu'il appartient à l'un des sous-espaces vectoriels V_j. Déterminer j.*

1.1.4 Déterminer la matrice $B = A^2$ associée à fof dans la base $\mathcal{B}$.

On posera $B = (b_{jk})$ $1 \leq j \leq n$; $1 \leq k \leq n$ et on calculera les éléments de B en fonction des éléments de A.

1.2.1 - Calculer $f^3(e_1)$, $f^3(e_2)$, $f^3(e_3)$

1.2.2 - Pour tout entier k , $4 \leq k \leq n$

Calculer $f^3(e_k)$ et montrer qu'il appartient à l'un des sous-espaces vectoriels Y_j .

Déterminer j .

1.2.3 - En déduire la forme de A^3 .

1.2.4 - En déduire que A est nilpotente d'ordre au plus égal à n .

1.3 Soit la matrice M

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculer M^p pour p entier naturel quelconque.

1.4 Soit N un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, N nilpotente d'ordre n

1.4.1 - Montrer que $I - N$ est inversible

(on pourra utiliser la matrice $P = I + N + N^2 + \cdots + N^{n-1}$)

1.4.2 - En utilisant le résultat précédent, calculer M^{-1} où M est la matrice définie au 1.3.

1.4.3 - Calculer M^p pour p entier relatif .

II

Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A nilpotente.
On définit "exponentielle de A " notée $\exp(A)$ la matrice :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \qquad \text{(la somme est en fait "finie")}$$

2.1 Soit A et B , deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent, nilpotentes d'ordres respectifs α et β .

2.1.1 Montrer que $A + B$ est nilpotente d'ordre $\gamma \leq \alpha + \beta - 1$.

2.1.2 Montrer que $\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$.

2.1.3 En déduire que, pour toute matrice A nilpotente, $\exp(A)$ est inversible et calculer son inverse.

2.1.4 calculer $\exp(A)$ $\exp(B)$ et $\exp(A+B)$ si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2.1

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.2

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$