Lycée Louis le grand	Année scolaire 2008/2009
Mathématiques Supérieure MPSI

Semaine 3

1 Programme de Colles : Nombres complexes.

1.1 Structure de $\mathbb{C}$.

Structure de corps. Parie réelle, imaginaire, conjugué d'un nombre complexe. Module et argument d'un nombre complexe, inégalité triangulaire, identité du parallélogramme.

1.2 Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.

L'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un morphisme de groupes. Formule de Moivre, relations d'Euler. Applications, linéarisation de $\cos^n \theta \sin^m \theta$. Forme trigonométrique de $e^{i\theta} + e^{i\varphi}$, interprétation géométrique. Expression de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de $\tan(\theta/2)$.

1.3 Équations polynomiales.

Trinôme du second degré, racine n-ièmes de l'unité, racines n-ièmes de $a \in \mathbb{C}^*$.

1.4 Exponentielle complexe.

Définition, propriétés. L'application exp est un morphisme de groupes.

1.5 Transformations du plan.

Expressions complexes d'une translation, rotation de centre O d'angle θ, ...
Similitudes directes : expression complexe. Centre, rapport et angle d'une similitude directe qui n'est pas une translation.

2 Petits

Exercice 1
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 3\overline{z}$.

Exercice 2
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = \sqrt{3} + 3i$.

Exercice 3
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\alpha + (n-k)\beta)$.

Exercice 4
Soit $z, z' \in \mathbb{U}$ tels que $zz' \neq -1$. Montrer que $\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

Exercice 5
Linéariser $(\cos\theta)^5$.

Exercice 6
Exprimer $(\cos 5\theta)(\sin 3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$

3 Gros

Exercice 7
Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) = 0$, en commençant par chercher les racines réelles.

Solution. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ alors $\Re(P(x_0)) = \Re(P)(x_0)$. De plus $\Re(P)$ est de degré 2 avec moult racines évidentes. $\square$

Exercice 8
On considère la relation définie sur $\mathbb{C}^*$ par $x\mathcal{R}y \iff \frac{x}{y} \in R_+^*$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Quelles en sont les classes ?

Solution. Les demi-droites. $\square$

Exercice 9
Quels sont les éléments de $\mathbb{U}_p \cap \mathbb{U}_q$, où p et q sont des entiers distincts.

Exercice 10

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité dans l'inégalité triangulaire $|z+z'| \leq |z| + |z'|$, où $z, z' \in \mathbb{C}^2$.
2. Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité dans l'inégalité $|z_1 + \dots z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|$.

Solution. Les z_i sont sur la même demi-droite. $\square$

4 Impairs

Exercice 11
Soit A, B, C des parties de $\mathbb{C}$ disjointes telles que $A \cup B \cup C = \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe z, z' dans la même partie, avec $|z - z'| = 1$.

Solution. Raisonner par l'absurde : tracer un triangle équilatéral de coté 1, dont chacun des sommets est nécessairement dans une partie différente, en rajouter un deuxième (on obtient un losange) puis faire tourner la figure autour d'un des sommets aigus du losange. L'autre sommet aigu parcours un cercle contenu dans une seule des partie, ce qui est absurde. $\square$

Exercice 12
Soit $z_1, \dots, z_n$ des complexes.

1. En considérant les parties réelles et imaginaires des z_k et leur signe, montrer qu'il existe $A \subset \{1, \dots, n\}$ telle que
$$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leq \left|\sum_{k\in A} z_k\right|$$
2. En considérant toutes les directions, montrer que l'on peut remplacer 4 par π.
3. Montrer que, quand les z_k sont non tous nuls, on peut imposer que l'inégalité soit stricte.
4. Montrer que la constante $\frac{1}{\pi}$ est optimale.

Exercice 13
Déterminer les nombres complexes dont la partie réelle est rationnelle.

Solution. $S = \{1, -j^2, i, j, -1, j^2, -i, -j\}$. Par des extensions de corps (ou du Tchebycheff) : non faisable en colle. $\square$