

Etude de la $\mathbb{R}$ – algèbre $\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]$

On se placera dans la $\mathbb{R}$ – algèbre des polynômes à une indéterminée notée $\mathbb{R}[X]$

Définition :

On appelle polynômes $T - \mathcal{C}^\infty (T > 0)$ de socle $\alpha \in \mathbb{R}$ tout polynôme P qui vérifie :

$$\forall i \in \mathbb{N}, P^{(i)}(\alpha) = P^{(i)}(\alpha + T)$$

Définition :

On note l'ensemble des polynômes $T - \mathcal{C}^\infty$ de socle α comme ceci $\mathbb{R}_{T,\alpha}^\infty[X]$

Proposition :

Tout polynôme constant est $T - \mathcal{C}^\infty$ de socle α

Démonstration :

Soit P un polynôme constant alors $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} P(x) = t_0$
donc $P(\alpha) = t_0 = P(\alpha + T)$ et $\forall (x, i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^* P^{(i)}(x) = 0$ donc
 $\forall i \in \mathbb{N}^* P^{(i)}(\alpha) = 0 = P^{(i)}(\alpha + T)$
donc $\forall i \in \mathbb{N} P^{(i)}(\alpha) = P^{(i)}(\alpha + T)$ donc $P \in \mathbb{R}_{T,\alpha}^\infty[X]$

Théorème :

$\mathbb{R}_{T,\alpha}^\infty[X]$ est une $\mathbb{R}$ – algèbre commutative

Démonstration :

Montrons que $\mathbb{R}_{T,\alpha}^\infty[X]$ est une sous algèbre de $\mathbb{R}[X]$

1 est constant donc $1 \in \mathbb{R}_{T,\alpha}^\infty[X]$

$\forall (\lambda, \mu, P, Q) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}_{T,\alpha}^\infty[X])^2$ on a $\forall i \in \mathbb{N}$
 $(\lambda P + \mu Q)^{(i)} = (\lambda P)^{(i)} + (\mu Q)^{(i)} = \lambda P^{(i)} + \mu Q^{(i)}$
donc $(\lambda P + \mu Q)^{(i)}(\alpha) = \lambda P^{(i)}(\alpha) + \mu Q^{(i)}(\alpha) = \lambda P^{(i)}(\alpha + T) + \mu Q^{(i)}(\alpha + T)$
 $= (\lambda P + \mu Q)^{(i)}(\alpha + T)$

donc $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}_{T,\alpha}^\infty[X]$

$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_{T,\alpha}^\infty[X])^2$ on a $\forall i \in \mathbb{N}$:

$$(PQ)^{(i)} = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} P^{(k)} Q^{(i-k)}$$

$$\text{donc } (PQ)^{(i)}(\alpha) = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} P^{(k)}(\alpha) \cdot Q^{(i-k)}(\alpha) = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} P^{(k)}(\alpha + T) \cdot Q^{(i-k)}(\alpha + T)$$

$$= (PQ)^{(i)}(\alpha + T)$$

donc $PQ \in \mathbb{R}_{T,\alpha}^\infty[X]$

Donc $\mathbb{R}_{T,\alpha}^\infty[X]$ est une sous algèbre de $\mathbb{R}[X]$ donc est une algèbre.

De plus elle est commutative car $\mathbb{R}[X]$ est commutative

Théorème :

Soit $P \in \mathbb{R}_{T,\alpha}^\infty[X]$ alors P est constant.

Démonstration :

Soit $P \in \mathbb{R}_{T,\alpha}^c[X]$ avec $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$

Alors on a $\forall i \in \mathbb{N} \quad P^{(i)}(\alpha) = P^{(i)}(\alpha + T)$

donc comme P est de degré au plus n on peut se restreindre à $i \in \{0, \dots, n\}$ car les dérivées suivantes seront toutes nulles d'où

$$\forall i \in \{0, \dots, n\} \quad P^{(i)}(\alpha) = P^{(i)}(\alpha + T)$$

Montrons par récurrence que $\forall k \in \{0, \dots, n-1\} \quad a_{n-k} = 0$

$$\text{Rang } 0 : P^{(n-1)}(x) = n! a_n X + (n-1)! a_{n-1}$$

$$\begin{aligned} \text{donc comme } P^{(n-1)}(\alpha) &= n! a_n \alpha + (n-1)! a_{n-1} \\ &= n! a_n (\alpha + T) + (n-1)! a_{n-1} = P^{(n-1)}(\alpha + T) \end{aligned}$$

d'où $n! a_n T = 0$ donc $a_n = 0$ car $T > 0$ la propriété est donc vraie au rang 0

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $j-1 < n-1$ montrons là au rang j

$$a_n = a_{n-1} = \dots = a_{n-j+1} = 0 \text{ donc } P(X) = \sum_{k=0}^{n-j} a_k X^k$$

$$P^{(n-j-1)}(x) = (n-j)! a_{n-j} X + (n-j-1)! a_{n-j-1}$$

$$\begin{aligned} \text{donc comme } P^{(n-j-1)}(\alpha) &= (n-j)! a_{n-j} \alpha + (n-j-1)! a_{n-j-1} \\ &= (n-j)! a_{n-j} (\alpha + T) + (n-j-1)! a_{n-j-1} \\ &= P^{(n-j-1)}(\alpha + T) \end{aligned}$$

d'où $(n-j)! a_{n-j} T = 0$ donc $a_{n-j} = 0$ car $T > 0$

La propriété est héréditaire jusqu'au rang $n-1$ et est vraie au rang 0 donc $\forall k \in \{0, \dots, n-1\} \quad a_{n-k} = 0$ donc $P(X) = a_0$ donc est constant.

Remarque:

Comme seuls les polynômes constants sont $T - C^\infty$ de socle α nous allons alléger la propriété et à présent donner une nouvelle définition.

Définition:

On appelle polynômes $T - C^{n_0}$ ($T > 0$) de socle $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$ tout polynôme P qui vérifie :

$$\forall i \in \{0, \dots, n_0\} \quad P^{(i)}(\alpha) = P^{(i)}(\alpha + T)$$

On notera l'ensemble de tel polynômes $\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]$

Etude de la $\mathbb{R}$ – algèbre $\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]$

Proposition:

Soit P un polynôme $T - \mathcal{C}^{n_0}$ de socle α et de degré $d \leq n_0 + 1$ alors P est constant.

Démonstration :

Soit P un polynôme $T - \mathcal{C}^{n_0}$ de socle α et de degré $d \leq n_0 + 1$
 alors $\forall i \in \{0, \dots, n_0\} \quad P^{(i)}(\alpha) = P^{(i)}(\alpha + T)$ et on a $P^{(n_0+1)} = (n_0 + 1)! a_{n_0+1}$
 donc constant d'où P est $T - \mathcal{C}^{n_0+1}$ de socle α et de degré $d \leq n_0 + 1$
 mais aussi $\forall p > n_0 + 1$ on $P^{(p)}(X) = 0$ donc on a finalement
 $\forall p \in \mathbb{N} \quad P^{(p)}(\alpha) = P^{(p)}(\alpha + T)$ donc P est $T - \mathcal{C}^\infty$ de socle α donc constant.

Corollaire :

Soit P un polynôme non constant et $T - \mathcal{C}^{n_0}$ de socle α alors il est de degré au moins $n_0 + 2$

Proposition :

Tout polynôme constant est $T - \mathcal{C}^{n_0}$ de socle α

Démonstration :

Soit P un polynôme constant alors $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = t_0$
 donc $P(\alpha) = t_0 = P(\alpha + T)$ et $\forall (x, i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^* \quad P^{(i)}(x) = 0$ donc
 $\forall i \in \mathbb{N}^* \quad P^{(i)}(\alpha) = 0 = P^{(i)}(\alpha + T)$
 donc $\forall i \in \{0, \dots, n_0\} \quad P^{(i)}(\alpha) = P^{(i)}(\alpha + T)$ donc $P \in \mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]$

Théorème :

$\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]$ est une $\mathbb{R}$ – algèbre commutative

Démonstration :

Montrons que $\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]$ est une sous algèbre de $\mathbb{R}[X]$

1 est constant donc $1 \in \mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]$

$\forall (\lambda, \mu, P, Q) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X])^2$ on a $\forall i \in \{0, \dots, n_0\}$

$$(\lambda P + \mu Q)^{(i)} = (\lambda P)^{(i)} + (\mu Q)^{(i)} = \lambda P^{(i)} + \mu Q^{(i)}$$

$$\text{donc } (\lambda P + \mu Q)^{(i)}(\alpha) = \lambda P^{(i)}(\alpha) + \mu Q^{(i)}(\alpha) = \lambda P^{(i)}(\alpha + T) + \mu Q^{(i)}(\alpha + T) \\ = (\lambda P + \mu Q)^{(i)}(\alpha + T)$$

donc $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]$

$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X])^2$ on a $\forall i \in \{0, \dots, n_0\}$:

$$(PQ)^{(i)} = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} P^{(k)} Q^{(i-k)}$$

$$\text{donc } (PQ)^{(i)}(\alpha) = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} P^{(k)}(\alpha) \cdot Q^{(i-k)}(\alpha) = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} P^{(k)}(\alpha + T) \cdot Q^{(i-k)}(\alpha + T) \\ = (PQ)^{(i)}(\alpha + T)$$

donc $PQ \in \mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]$

Donc $\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]$ est une sous algèbre de $\mathbb{R}[X]$ donc est une algèbre.

De plus elle est commutative car $\mathbb{R}[X]$ est commutative

Définition :

On définit sur $\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]$ une relation binaire $\asymp$ de la manière suivante

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X])^2, P \asymp Q \Leftrightarrow \forall i \in \{0, \dots, n_0\} P^{(i)}(\alpha) = Q^{(i)}(\alpha)$$

On dira que P et Q ont un même comportement

Proposition :

$\asymp$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]$

Démonstration :

$$\forall (P, Q, R) \in (\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X])^3 \text{ on a :}$$

$$\forall i \in \{0, \dots, n_0\} P^{(i)}(\alpha) = P^{(i)}(\alpha) \text{ donc } P \asymp P$$

$$P \asymp Q \Leftrightarrow \forall i \in \{0, \dots, n_0\} P^{(i)}(\alpha) = Q^{(i)}(\alpha) \Leftrightarrow Q \asymp P$$

$$P \asymp Q \text{ et } Q \asymp R \Rightarrow \forall i \in \{0, \dots, n_0\} P^{(i)}(\alpha) = Q^{(i)}(\alpha) \text{ et } Q^{(i)}(\alpha) = R^{(i)}(\alpha) \\ \Rightarrow \forall i \in \{0, \dots, n_0\} P^{(i)}(\alpha) = R^{(i)}(\alpha) \Rightarrow P \asymp R$$

Donc $\asymp$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]$

Proposition :

$\forall P \in \mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]$ alors $P(2\alpha + T - X) \in \mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]$

Démonstration :

$$\text{Soit } P(X) \in \mathbb{R}_{T_1,\alpha_1}^{n_0} \text{ alors } \Rightarrow \forall i \in \{0, \dots, n_0\} P^{(i)}(\alpha_1) = P^{(i)}(\alpha_1 + T_1)$$

$$\text{Notons } Q(X) = P(2\alpha + T - X)$$

$$\forall i \in \{0, \dots, n_0\} Q^{(i)}(X) = (-1)^i P^{(i)}(2\alpha + T - X)$$

$$Q^{(i)}(\alpha) = (-1)^i P^{(i)}(2\alpha + T - \alpha) = (-1)^i P^{(i)}(\alpha + T) = (-1)^i P^{(i)}(\alpha) \\ = (-1)^i P^{(i)}(2\alpha + T - (\alpha + T)) = Q^{(i)}(\alpha + T) \Rightarrow Q \in \mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]$$

Proposition :

$\forall (\alpha_1, \alpha_2, T_1, T_2, n_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}$ si $P(X) \in \mathbb{R}_{T_1, \alpha_1}^{n_0}[X]$ alors $P\left(\frac{T_1}{T_2}(X - \alpha_2) + \alpha_1\right) \in \mathbb{R}_{T_2, \alpha_2}^{n_0}[X]$

Démonstration :

Soit $P(X) \in \mathbb{R}_{T_1, \alpha_1}^{n_0}$ alors $\Rightarrow \forall i \in \{0, \dots, n_0\} \quad P^{(i)}(\alpha_1) = P^{(i)}(\alpha_1 + T_1)$

Notons $Q(X) = P\left(\frac{T_1}{T_2}(X - \alpha_2) + \alpha_1\right)$

On a $Q'(X) = \frac{T_1}{T_2} \cdot P'\left(\frac{T_1}{T_2}(X - \alpha_2) + \alpha_1\right)$

Par simple récurrence $\forall i \in \{0, \dots, n_0\} \quad Q^{(i)}(X) = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^i P^{(i)}\left(\frac{T_1}{T_2}(X - \alpha_2) + \alpha_1\right)$

Donc $\forall i \in \{0, \dots, n_0\} \quad Q^{(i)}(\alpha_2) = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^i P^{(i)}\left(\frac{T_1}{T_2}(\alpha_2 - \alpha_2) + \alpha_1\right) = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^i P^{(i)}(\alpha_1)$

$= \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^i P^{(i)}(\alpha_1 + T_1) = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^i P^{(i)}\left(\frac{T_1}{T_2}(\alpha_2 + T_2 - \alpha_2) + \alpha_1\right) = Q^{(i)}(\alpha_2 + T_2)$

Donc $Q(X) = P\left(\frac{T_1}{T_2}(X - \alpha_2) + \alpha_1\right) \in \mathbb{R}_{T_2, \alpha_2}^{n_0}[X]$

Théorème :

Soit f une application linéaire non constante si $P(X) \in \mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]$ alors

$P(f(X)) \in \mathbb{R}_{T_0, \alpha_0}^{n_0}[X]$ avec $T_0 = \frac{T}{|a|}$ et $\alpha_0 = \frac{\text{sign}(a)}{2} \cdot \frac{2\alpha + T(1 - \text{sign}(a)) - 2b}{|a|}$

Démonstration :

Soit $P(X) \in \mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}$ alors $\Rightarrow \forall i \in \{0, \dots, n_0\} \quad P^{(i)}(\alpha_1) = P^{(i)}(\alpha_1 + T_1)$

Notons $Q(X) = P(f(X))$ avec $f: x \mapsto ax + b$ avec $a \neq 0$

$f^{-1}: x \mapsto \frac{x - b}{a}$

$\forall i \in \{0, \dots, n_0\} \quad Q^{(i)}(X) = a^i P^{(i)}\left(\frac{X - b}{a}\right)$

$Q^{(i)}(f^{-1}(\alpha)) = a^i P^{(i)}\left(f(f^{-1}(\alpha))\right) = a^i P^{(i)}(\alpha) = a^i P^{(i)}(\alpha + T)$

$= a^i P^{(i)}\left(f(f^{-1}(\alpha + T))\right) = Q^{(i)}(f^{-1}(\alpha + T))$ donc $\exists (t_0, \alpha_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que

$Q \in \mathbb{R}_{T_0, \alpha_0}^{n_0}$ et on a $T_0 = |f^{-1}(\alpha + T) - f^{-1}(\alpha)| = \left|\frac{\alpha + T - b}{a} - \frac{\alpha - b}{a}\right| = \left|\frac{T}{a}\right| = \frac{T}{|a|}$

$2\alpha_0 + T_0 = f^{-1}(\alpha + T) + f^{-1}(\alpha) = \frac{\alpha + T - b}{a} + \frac{\alpha - b}{a} = \frac{2\alpha + T - 2b}{a}$

donc $\alpha_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{2\alpha + T - 2b}{a} - \frac{T}{|a|} \right) = \frac{1}{2} \left(\text{sign}(a) \frac{2\alpha + T - 2b}{|a|} - \frac{T}{|a|} \right)$

$= \frac{\text{sign}(a)}{2} \cdot \frac{2\alpha + T(1 - \text{sign}(a)) - 2b}{|a|}$

Théorème :

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, T_1, T_2, n_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}$ et $f: \begin{cases} \mathbb{R}_{T_1, \alpha_1}^{n_0}[X] \rightarrow \mathbb{R}_{T_2, \alpha_2}^{n_0}[X] \\ P(X) \mapsto P\left(\frac{T_1}{T_2}(X - \alpha_2) + \alpha_1\right) \end{cases}$ alors f est un isomorphisme d'algèbre de $\mathbb{R}_{T_1, \alpha_1}^{n_0}[X]$ sur $\mathbb{R}_{T_2, \alpha_2}^{n_0}[X]$

Démonstration :

f^{-1} est définie et on a $f^{-1}: \begin{cases} \mathbb{R}_{T_2, \alpha_2}^{n_0}[X] \rightarrow \mathbb{R}_{T_1, \alpha_1}^{n_0}[X] \\ Q(X) \mapsto Q\left(\frac{T_2}{T_1}(X - \alpha_1) + \alpha_2\right) \end{cases}$

Donc f est bijective.

$\forall (\lambda, \mu, P, Q) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}_{T_1, \alpha_1}^{n_0}[X])^2$ on a

$$\begin{aligned} f((\lambda P + \mu Q)(X)) &= (\lambda P + \mu Q)\left(\frac{T_1}{T_2}(X - \alpha_2) + \alpha_1\right) \\ &= (\lambda P)\left(\frac{T_1}{T_2}(X - \alpha_2) + \alpha_1\right) + (\mu Q)\left(\frac{T_1}{T_2}(X - \alpha_2) + \alpha_1\right) \\ &= \lambda P\left(\frac{T_1}{T_2}(X - \alpha_2) + \alpha_1\right) + \mu Q\left(\frac{T_1}{T_2}(X - \alpha_2) + \alpha_1\right) \\ &= \lambda f(P(X)) + \mu f(Q(X)) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

$$\begin{aligned} f(P(X) \times Q(X)) &= f((P \times Q)(X)) = (P \times Q)\left(\frac{T_1}{T_2}(X - \alpha_2) + \alpha_1\right) \\ &= P\left(\frac{T_1}{T_2}(X - \alpha_2) + \alpha_1\right) \times Q\left(\frac{T_1}{T_2}(X - \alpha_2) + \alpha_1\right) \\ &= f(P(X)) \times f(Q(X)) \end{aligned}$$

Donc f est un morphisme d'algèbre donc un isomorphisme d'algèbre car bijectif.

Définition :

L'isomorphisme d'algèbre défini plus haut sera noté $\Psi_{\alpha_1 \alpha_2}^{n_0}_{T_1 T_2}: \begin{cases} \mathbb{R}_{T_1, \alpha_1}^{n_0}[X] \rightarrow \mathbb{R}_{T_2, \alpha_2}^{n_0}[X] \\ P(X) \mapsto P\left(\frac{T_1}{T_2}(X - \alpha_2) + \alpha_1\right) \end{cases}$

Théorème :

Soient $\mathbb{R}_{T_1, \alpha_1}^{n_0}[X]$ et $\mathbb{R}_{T_2, \alpha_2}^{n_0}[X]$, $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_{T_1, \alpha_1}^{n_0}[X])^2$ si $P(X) \asymp Q(X)$ alors

$$\Psi_{\alpha_1 \alpha_2}^{n_0}_{T_1 T_2}(P(X)) \asymp \Psi_{\alpha_1 \alpha_2}^{n_0}_{T_1 T_2}(Q(X))$$

Démonstration :

Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_{T_1, \alpha_1}^{n_0}[X])^2$ et $P(X) \asymp Q(X)$
 donc $\forall i \in \{0, \dots, n_0\} \quad P^{(i)}(\alpha_1) = Q^{(i)}(\alpha_1)$
 Notons $R(X) = \Psi_{\alpha_1 \alpha_2}^{n_0}(P(X))$ et $S(X) = \Psi_{\alpha_1 \alpha_2}^{n_0}(Q(X))$
 alors $\forall i \in \{0, \dots, n_0\}$ on a

$$R^{(i)}(X) = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^i P^{(i)}\left(\frac{T_1}{T_2}(X - \alpha_2) + \alpha_1\right)$$
 et
$$S^{(i)}(X) = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^i Q^{(i)}\left(\frac{T_1}{T_2}(X - \alpha_2) + \alpha_1\right)$$

 donc $R^{(i)}(\alpha_2) = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^i P^{(i)}(\alpha_1) = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^i Q^{(i)}(\alpha_1) = S^{(i)}(\alpha_2)$
 donc $R(X) \asymp S(X)$
 donc $\Psi_{\alpha_1 \alpha_2}^{n_0}(P(X)) \asymp \Psi_{\alpha_1 \alpha_2}^{n_0}(Q(X))$

Remarque :

Comme $\Psi_{\alpha_1 \alpha_2}^{n_0}$ est un isomorphisme et que son application réciproque est $\Psi_{\alpha_2 \alpha_1}^{n_0}$ on voit que
 dans le théorème précédent on a $R(X) = \Psi_{\alpha_1 \alpha_2}^{n_0}(P(X))$ et $S(X) = \Psi_{\alpha_1 \alpha_2}^{n_0}(Q(X))$ et donc
 $P(X) = \Psi_{\alpha_2 \alpha_1}^{n_0}(R(X))$ et $Q(X) = \Psi_{\alpha_2 \alpha_1}^{n_0}(S(X))$ d'où $R(X) \asymp S(X) \Rightarrow P(X) \asymp Q(X)$
 d'où on a $P(X) \asymp Q(X) \Leftrightarrow \Psi_{\alpha_1 \alpha_2}^{n_0}(P(X)) \asymp \Psi_{\alpha_1 \alpha_2}^{n_0}(Q(X))$

Définition :

On notera $[\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n_0}] = \{P \in \mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X] / \forall i \in \{0, \dots, n_0\} \quad P^{(i)}(\alpha) = \beta_i\}$

Proposition :

Soit $P(X) = a_0$ un polynôme constant alors $P \in [a_0, 0, \dots, 0]$

Démonstration :

Soit $P(X) = a_0$ alors $P(\alpha) = a_0$ et $\forall i \in \{1, \dots, n_0\} \quad P^{(i)}(X) = 0$ donc $P^{(i)}(\alpha) = 0$
 donc $P \in [a_0, 0, \dots, 0]$

Définition :

On notera $\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X] / \asymp$ l'ensemble quotient de $\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]$ pour la relation d'équivalence $\asymp$

Définition:

On définit sur $\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X] / \asymp$ les lois $+, \cdot$ et $\times$ de la manière suivante :

Soit $([\beta_0, \dots, \beta_{n_0}], [\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}]) \in (\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]/\simeq)^2$

Alors on définit + par :

$$[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] + [\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}] = [\beta_0 + \gamma_0, \dots, \beta_{n_0} + \gamma_{n_0}]$$

On définit . par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot [\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] = [\lambda \cdot \beta_0, \dots, \lambda \cdot \beta_{n_0}]$$

Et enfin $\times$ par :

$$[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] \times [\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}] = \left[\beta_0 \gamma_0, \beta_0 \gamma_1 + \beta_1 \gamma_0, \dots, \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \beta_k \cdot \gamma_{i-k}, \dots, \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} \beta_k \cdot \gamma_{n_0-k} \right]$$

Théorème :

$$\forall [\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] \in \mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]/\simeq, \exists P \in \mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X] ; [P(\alpha), P'(\alpha), \dots, P^{(n_0)}(\alpha)] = [\beta_0, \dots, \beta_{n_0}]$$

Démonstration :

On a vu que $\Delta_{2p} \in [0, \dots, 0, (2p)! T^{2p}, \delta_{2p+1}, \dots, \delta_{n_0}]$ et $\Xi_{2p+1} \in [0, \dots, 0, (2p+1)! T^{2p+2}, \gamma_{2p+2}, \dots, \gamma_{n_0}]$ comme on sait trouver un polynôme de $\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]$ à coordonnées nulles avant un certain i_0 et non nulle en i_0 on peut donc trouver un élément de tout $[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}]$

Théorème :

$(\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]/\simeq, +, \cdot, \times)$ est une algèbre commutative

Démonstration :

Il faut montrer que $(\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]/\simeq, +, \cdot)$ est un espace vectoriel, $\times$ est interne, associative, admettant un élément neutre, et distributive par rapport à +, et $\forall (\lambda, \mu, A, B) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]/\simeq)^2$, on ait $(\lambda \cdot A) \times (\mu \cdot B) = (\lambda \mu) \cdot (A \times B)$

$$\forall ([\beta_0, \dots, \beta_{n_0}], [\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}], [\delta_0, \dots, \delta_{n_0}]) \in (\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]/\simeq)^3$$

$$[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] + [\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}] = [\beta_0 + \gamma_0, \dots, \beta_{n_0} + \gamma_{n_0}] \in \mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]/\simeq$$

$$([\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] + [\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}]) + [\delta_0, \dots, \delta_{n_0}] = [\beta_0 + \gamma_0 + \delta_0, \dots, \beta_{n_0} + \gamma_{n_0} + \delta_{n_0}] = [\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] + ([\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}] + [\delta_0, \dots, \delta_{n_0}])$$

$$[0, \dots, 0] + [\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] = [\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] = [\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] + [0, \dots, 0]$$

$$[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] + [-\beta_0, \dots, -\beta_{n_0}] = [0, \dots, 0]$$

$[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] + [\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}] = [\beta_0 + \gamma_0, \dots, \beta_{n_0} + \gamma_{n_0}] = [\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] + [\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}]$
 $(\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]/\simeq, +)$ est donc un groupe abélien

$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned} \lambda.([\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] + [\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}]) &= \lambda.([\beta_0 + \gamma_0, \dots, \beta_{n_0} + \gamma_{n_0}]) \\ &= [\lambda\beta_0 + \lambda\gamma_0, \dots, \lambda\beta_{n_0} + \lambda\gamma_{n_0}] = [\lambda\beta_0, \dots, \lambda\beta_{n_0}] + [\lambda\gamma_0, \dots, \lambda\gamma_{n_0}] \\ &= \lambda.[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] + \lambda.[\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu).[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] &= [(\lambda + \mu).\beta_0, \dots, (\lambda + \mu).\beta_{n_0}] = [\lambda\beta_0, \dots, \lambda\beta_{n_0}] + [\mu\beta_0, \dots, \mu\beta_{n_0}] \\ &= \lambda.[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] + \mu.[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] \end{aligned}$$

$$(\lambda\mu).[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] = [\lambda\mu\beta_0, \dots, \lambda\mu\beta_{n_0}] = \lambda.[\mu\beta_0, \dots, \mu\beta_{n_0}] = \lambda.(\mu.[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}])$$

$$1.[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] = [1.\beta_0, \dots, 1.\beta_{n_0}] = [\beta_0, \dots, \beta_{n_0}]$$

donc $(\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]/\simeq, +, .)$ est un espace vectoriel

$$[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] \times [\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}] = \left[\beta_0\gamma_0, \dots, \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} \beta_k \cdot \gamma_{n_0-k} \right] \in \mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]/\simeq$$

Soit $P \in [\beta_0, \dots, \beta_{n_0}]$, $Q \in [\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}]$ et $R \in [\delta_0, \dots, \delta_{n_0}]$ alors

$$\begin{aligned} &[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] \times ([\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}] \times [\delta_0, \dots, \delta_{n_0}]) \\ &= [P(\alpha), \dots, P^{(n_0)}(\alpha)] \times ([Q(\alpha), \dots, Q^{(n_0)}(\alpha)] \times [R(\alpha), \dots, R^{(n_0)}(\alpha)]) \\ &= [P(\alpha), \dots, P^{(n_0)}(\alpha)] \times [(Q \times R)(\alpha), \dots, (Q \times R)^{(n_0)}(\alpha)] \\ &= [(P \times (Q \times R))(\alpha), \dots, (P \times (Q \times R))^{(n_0)}(\alpha)] \\ &= [((P \times Q) \times R)(\alpha), \dots, ((P \times Q) \times R)^{(n_0)}(\alpha)] \\ &= ([\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] \times [\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}]) \times [\delta_0, \dots, \delta_{n_0}] \end{aligned}$$

$$[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] \times ([\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}] + [\delta_0, \dots, \delta_{n_0}])$$

$$\begin{aligned} &= \left[\beta_0(\gamma_0 + \delta_0), \dots, \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} \beta_k (\gamma_{n_0-k} + \delta_{n_0-k}) \right] \\ &= \left[\beta_0\gamma_0 + \beta_0\delta_0, \dots, \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} \beta_k \gamma_{n_0-k} + \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} \beta_k \delta_{n_0-k} \right] \\ &= \left[\beta_0\gamma_0, \dots, \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} \beta_k \gamma_{n_0-k} \right] + \left[\beta_0\delta_0, \dots, \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} \beta_k \delta_{n_0-k} \right] \\ &= [\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] \times [\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}] + [\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] \times [\delta_0, \dots, \delta_{n_0}] \end{aligned}$$

$$[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] \times [1, 0, \dots, 0] = \left[1.\beta_0, \dots, \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \beta_k \cdot \delta_{i-k}^0, \dots, \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} \beta_k \cdot \delta_{n_0-k}^0 \right]$$

avec $\delta_i^j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

$$\begin{aligned} [\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] \times [1, 0, \dots, 0] &= \left[\beta_0, \dots, \beta_i + \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} \beta_k \cdot \delta_{i-k}^0, \dots, \beta_{n_0} + \sum_{k=0}^{n_0-1} \binom{n_0}{k} \beta_k \cdot \delta_{n_0-k}^0 \right] \\ &= \left[\beta_0, \dots, \beta_i + \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} \beta_k \cdot 0, \dots, \beta_{n_0} + \sum_{k=0}^{n_0-1} \binom{n_0}{k} \beta_k \cdot 0 \right] = [\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}]) \times (\mu[\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}]) &= [\lambda\beta_0, \dots, \lambda\beta_{n_0}] \times [\mu\gamma_0, \dots, \mu\gamma_{n_0}] \\ &= \left[\lambda\beta_0\mu\gamma_0, \dots, \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} \lambda\beta_k \cdot \mu\gamma_{n_0-k} \right] = \left[(\lambda\mu) \cdot \beta_0\gamma_0, \dots, (\lambda\mu) \cdot \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} \beta_k \cdot \gamma_{n_0-k} \right] \\ &= (\lambda\mu) \cdot \left[\beta_0\gamma_0, \dots, \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} \beta_k \cdot \gamma_{n_0-k} \right] = (\lambda\mu)([\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] \times [\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}]) \end{aligned}$$

$(\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]/\simeq, +, \cdot, \times)$ est donc une algèbre

$$\begin{aligned} \text{de plus } [\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] \times [\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}] &= \left[\beta_0\gamma_0, \dots, \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} \beta_k \cdot \gamma_{n_0-k} \right] \\ &= \left[\gamma_0\beta_0, \dots, \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} \gamma_k \cdot \beta_{n_0-k} \right] = [\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}] \times [\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] \\ \text{donc } (\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]/\simeq, +, \cdot, \times) &\text{ est une algèbre commutative} \end{aligned}$$

Proposition :

Soit $\pi: \begin{cases} \mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X] \rightarrow \mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]/\simeq \\ P \mapsto [P(\alpha), P'(\alpha), \dots, P^{(n_0)}(\alpha)] \end{cases}$ est un morphisme surjectif d'algèbre appelé

surjection canonique.

Démonstration :

Tout $[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}]$ admet un antécédant donc π est surjective.

$\forall (\lambda, \mu, P, Q) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X])^2$ on a

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \pi(P) + \mu \cdot \pi(Q) &= \lambda \cdot [P(\alpha), \dots, P^{(n_0)}(\alpha)] + \mu \cdot [Q(\alpha), \dots, Q^{(n_0)}(\alpha)] \\ &= [\lambda \cdot P(\alpha), \dots, \lambda \cdot P^{(n_0)}(\alpha)] + [\mu \cdot Q(\alpha), \dots, \mu \cdot Q^{(n_0)}(\alpha)] \\ &= [\lambda \cdot P(\alpha) + \mu \cdot Q(\alpha), \dots, \lambda \cdot P^{(n_0)}(\alpha) + \mu \cdot Q^{(n_0)}(\alpha)] \\ &= [(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(\alpha), \dots, (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)^{(n_0)}(\alpha)] = \pi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q) \quad \pi \text{ est donc linéaire} \end{aligned}$$

$$\pi(P \times Q) = [(P \times Q)(\alpha), \dots, (P \times Q)^{(n_0)}(\alpha)]$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[P(\alpha)Q(\alpha), \dots, \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} P^{(k)}(\alpha) \cdot Q^{(n_0-k)}(\alpha) \right] \\
 &= [P(\alpha), \dots, P^{(n_0)}(\alpha)] \times [Q(\alpha), \dots, Q^{(n_0)}(\alpha)] \\
 &= \pi(P) \times \pi(Q)
 \end{aligned}$$

Donc π est un morphisme surjectif d'algèbre

Théorème :

$\forall [\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] \in \mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]/\simeq, [\beta_0, \dots, \beta_{n_0}]$ est inversible $\Leftrightarrow \beta_0 \neq 0$

Démonstration :

Supposons $[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}]$ inversible, alors $\exists [\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}] \in \mathbb{R}_{T,\alpha}^{n_0}[X]/\simeq$ tel que

$$[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] \times [\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}] = \left[\beta_0 \gamma_0, \dots, \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} \beta_k \cdot \gamma_{n_0-k} \right] = [1, 0, \dots, 0]$$

alors $\beta_0 \gamma_0 = 1$ donc $\beta_0 \neq 0$

Supposons $\beta_0 \neq 0$ alors prenons $\gamma_0 = \frac{1}{\beta_0}$ on a donc $\beta_0 \gamma_0 = 1$

Par récurrence prenons $\gamma_i = -\frac{1}{\beta_0} \sum_{k=1}^i \binom{i}{k} \beta_k \cdot \gamma_{i-k}$

$$[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] \times [\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}] = \left[\beta_0 \gamma_0, \dots, \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \beta_k \cdot \gamma_{i-k}, \dots, \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} \beta_k \cdot \gamma_{n_0-k} \right]$$

On a $\beta_0 \gamma_0 = 1$ et remarquons donc que $\forall i \in \{1, \dots, n_0\}$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \beta_k \cdot \gamma_{i-k} &= \beta_0 \gamma_i + \sum_{k=1}^i \binom{i}{k} \beta_k \cdot \gamma_{i-k} \\
 &= \beta_0 \cdot \left(-\frac{1}{\beta_0} \sum_{k=1}^i \binom{i}{k} \beta_k \cdot \gamma_{i-k} \right) + \sum_{k=1}^i \binom{i}{k} \beta_k \cdot \gamma_{i-k} = 0
 \end{aligned}$$

donc $[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}] \times [\gamma_0, \dots, \gamma_{n_0}] = [1, 0, \dots, 0]$ donc $[\beta_0, \dots, \beta_{n_0}]$ est inversible