

## Examen 2010 – session 1

Fiche de synthèse de 4 pages autorisée – Durée = 2 heures

Sans justification, toute réponse, même correcte, ne sera pas considérée.

### 1 Codage linéaire [6 points]

On définit un code systématique  $[4, 9]$  de la façon suivante : si le bloc à coder est  $b_1b_2b_3b_4$  alors les bits de contrôle  $c_1c_2c_3c_4c_5$  sont choisis de sorte que, dans le tableau ci-dessous, le poids de chaque ligne et de chaque colonne soit pair.

$b_1$	$b_2$	$c_1$
$b_3$	$b_4$	$c_2$
$c_5$	$c_4$	$c_3$

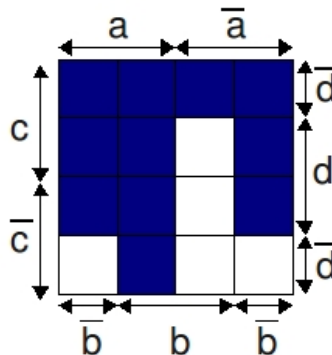
Par exemple, le mot de code associé à 0010 est 001001101.

Les questions ci-après peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

1. Comment coder le bloc 1010 ? Est-ce que 001100001 est un mot de code ?
2. Exprimer chaque  $c_i$  en fonction des  $b_j$ .
3. Démontrer que ce codage est linéaire.
4. Combien existe-t-il de mots de code ? Quel est le rendement de ce codage ?
5. Déterminer la matrice génératrice de ce code, et sa distance minimale.
6. Donner la correction des messages reçus  $R_1 = 000101100$ ,  $R_2 = 010010110$  et  $R_3 = 010010000$ , soit en utilisant le tableau standard, soit en utilisant le tableau des syndrômes, dont nous donnons des extraits en annexe. Si la méthode des syndrômes est choisie, il est demandé de donner la matrice de contrôle.

### 2 Fonctions booléennes [7 points]

Soit  $f$  une fonction booléenne à quatre variables, donnée par son tableau de Karnaugh ci-après.



1. Donner la table de vérité de  $f$ .
2. Indiquer la forme canonique disjunctive de  $f$ .
3. Dessiner les implicants premiers de  $f$ , et donner le monôme correspondant à chacun d'entre eux ; en déduire la (ou les) forme(s) polynomiale(s) réduite(s) minimale(s) de  $f$ .
4. Dessiner une chaîne de contacts implantant  $f$ .
5. Donner un circuit logique implantant  $\bar{f}$ .

### 3 Calcul booléen [2 points]

Soit  $f = a(\overline{b \vee cd}) \vee \overline{b}(ac \vee \overline{d}) \vee a\overline{b}$

1. Développer  $f$  pour l'exprimer sous forme polynomiale.
2. Donner une forme polynomiale réduite (pas forcément minimale !).

### 4 Logique propositionnelle [3 points]

Vous vous trouvez sur une île un peu étrange : l'île de Puro-Pira. Vous savez qu'à part vous, on y trouve deux catégories de gens : les Sincères, qui ne disent que des choses vraies, et les menteurs, qui ne disent que des choses fausses.

Alice et Bernard sont deux habitants de l'île de Puro-Pira. Il se peut que ce soient deux Sincères, deux menteurs, un Sincère et un menteur, etc. Tout est possible. De plus, les questions sont indépendantes (donc il se peut que Bernard soit un menteur dans la question 1 et un Sincère dans la question 2).

On considère les variables propositionnelles  $A$  et  $B$  :

- $A$  signifie que Alice est Sincère (donc  $\neg A$  signifie qu'elle est menteuse) ;
- $B$  signifie que Bernard est un Sincère (et  $\neg B$  signifie que Bernard est menteur).

Pour chacun des deux cas indépendants suivants : exprimer les propositions énoncées à l'aide des deux variables propositionnelles  $A$  et  $B$  et des connecteurs logiques, puis répondre à la question posée en développant et simplifiant les propositions logiques.

1. Bernard dit : Nous sommes tous les deux des menteurs. Bernard est-il Sincère ou menteur ? Et Alice ?
2. Alice dit : Je ne suis ni une Sincère ni une menteuse, et Bernard ajoute : C'est vrai !. Qu'en déduire sur Alice et sur Bernard ?

### 5 Questions de cours [2 points]

1. Quel est le consensus des monômes  $\overline{abc}\overline{ef}g$  et  $\overline{bcde}\overline{h}$  ?
2. Soit  $\mathcal{G}_9$  l'algèbre de boole des fonctions booléennes à 9 variables. Combien d'éléments possède  $\mathcal{G}_9$  ? Donner une formule de la fonction qui correspond au  $\perp$  de  $\mathcal{G}_9$ .
3. Convertir  $(AE40019)_{16}$  en binaire.

### 6 Dénombrement [bonus 3 points]

1. Combien de nombres de 3 chiffres peut-on former à l'aide des six chiffres 2, 3, 5, 6, 7, 9, sans qu'un chiffre n'apparaisse deux fois dans le nombre ?
2. Combien de ces nombres sont :
  - (a) inférieurs à 500 ?
  - (b) impairs ?
  - (c) pairs ?
  - (d) multiples de 5 ?

## Annexe de l'exercice 1

Ci-après sont donnés les extraits des tableaux pour la correction des messages de l'exercice 1 (question 6).

### Extrait du tableau standard

000000000	000101110	001001101	001100011	010010110	...	101110110	110101101	111001110
000000001	000101111	001001100	001100010	010010111	...	101110111	110101100	111001111
000000010	000101100	001001111	001100001	010010100	...	101110100	110101111	111001100
000000100	000101010	001001001	001100111	010010010	...	101110010	110101001	111001010
...	...	...	...	...	...	...	...	...
000000011	000101101	001001110	001100000	010010101	...	101110101	110101110	111001101
000000101	000101011	001001000	001100110	010010011	...	101110011	110101000	111001011
000000110	000101000	001001011	001100101	010010000	...	101110000	110101011	111001000
...	...	...	...	...	...	...	...	...

### Extrait du tableau des syndrômes

Mots	Syndrômes
000000000	00000
000000010	00010
000010000	10000
001000000	01101
010000000	10110
000000011	00011
000000110	00110
000100001	01111
011000000	11011
000001110	11100