

1 Hiérarchie algébrique

1.1 Proto-nombres

1.1.1 Définition

On appelle proto-nombres les ensembles de la forme $1, 2, 3, \dots, n$, Beaucoup, c'est-à-dire un ensemble fini, ordonné, sur lequel deux opérations peuvent être définies, la table des opérations pour $n = 5$ est donnée ci-dessous, pour l'exemple.

Un ensemble de proto-nombres étant fini, l'application qui à n fait correspondre $n + 1$, finit toujours par tomber sur "Beaucoup", puis est stationnaire.

1.1.2 Table de multiplication

+	1	2	3	4	5	Beaucoup
1	2	3	4	5	Beaucoup	Beaucoup
2	3	4	5	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup
3	4	5	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup
4	5	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup
5	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup
Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup

$\times$	1	2	3	4	5	Beaucoup
1	1	2	3	4	5	Beaucoup
2	2	4	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup
3	3	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup
4	4	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup
5	5	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup
Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup	Beaucoup

1.1.3 Propriétés algébriques

L'addition et la multiplication sont commutatives et associatives, mais non régulières, la multiplication possède un élément neutre (1) ; du point de vue algébrique $(P, +)$ est un demi-groupe commutatif, et $(P, \times)$ est un monoïde commutatif.

La relation d'ordre naturelle est compatibles avec les opérations.

1.1.4 Synonymes, Isomorphismes, Exemples

On peut ajouter 0 à un ensemble de proto-nombres, afin d'avoir un élément neutre pour l'addition.

1.1.5 Utilisation en physique

D'une certaine façon tout le monde utilise des proto-nombres (généralement avec 0). Ils ne sont pas forcément reconnus comme tels puisque :

- Le proto-nombre qui précède "Beaucoup" n'est pas explicite
- L'ensemble utilisé dépend des personnes.
- L'ensemble utilisé dépend des circonstances.
- Même quand nous utilisons des proto-nombres, cela n'efface pas notre connaissance des nombres entiers naturels.

Pour prendre un exemple simple, mais forcément personnel : pour mesurer les fortunes, même données sous formes de nombres par les journaux, si je veux avoir une perception de ces montants, au-delà de 100 000 000 d'euros, je ne fais pas la différence tous ces nombres sont Beaucoup.

Je fais bien la différence entre 100 000 euros (qui me permettrait de faire quelques achats, de faire un beau voyage ...) et 1 000 000 (je peux arrêter de travailler et continuer à vivre comme aujourd'hui (et même mieux) avec les intérêts) et 10 000 000 (non seulement j'arrête de travailler mais ma vie va radicalement changer)

mais au-delà je suis incapable de faire la différence (du point de vue de ce que cela changerait à ma vie), par exemple entre 100 000 000 et 17 000 000 000 (même si la différence comptable ne m'échappe pas).

Les enfants commencent la maîtrise de la notion de "nombre d'éléments" d'une collection sous la forme de proto-nombres (sans les opérations) :

Extrait du livre *Le comptage : vers la construction du nombre* Par Catherine Van Nieuwenhoven :

Au départ les enfants peuvent compter des collections de deux ou trois objets correctement, mais pas des collections plus importantes.

Ce type de comptage a d'ailleurs été caractérisé par certains auteurs (Sophian, 1995) comme étant "1, 2, 3, beaucoup" suggérant que les grandes collections sont de manière indifférenciée considérées comme étant des "beaucoup".

On retrouve aussi les proto-nombres dans certains langages : [Heiltsuk](#), [Guana](#) etc.

1.1.6 Références

INRP, 1, 2, beaucoup... passionnément !, Rencontres pédagogiques, cahier No 21.

Children's numbers, Catherine Sophian, Brown & Benchmark Publishers (ISBN 0697131351)

[Le comptage : vers la construction du nombre](#)