

1 Variations à partir de la hiérarchie algébrique

1.1 Nombres Supernaturels

1.1.1 Introduction

L'ensemble des nombres Supernaturels que nous noterons $\mathbb{SN}$ par la suite, est une extension naturelle de $\mathbb{N}^*$, en tant que treillis (pour la relation de divisibilité).

$\mathbb{SN}$ permet de prolonger à certains [groupes profinis](#) des théorèmes valides pour les groupes finis.

Un Supernaturel peut aussi caractériser le degré d'une extension algébrique de corps quelconque (et pas seulement les extensions finies).

1.1.2 Définition

Un nombre Supernaturel est défini comme un produit formel indexé par $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres entiers naturels premiers :

$$x = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{n_p}. \text{ Où } n_p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{N}}, \text{ ensemble dans lequel l'addition est prolongée par } n + \infty = \infty.$$

L'exposant n_p est parfois noté $v_p(x)$ par prolongation de la valuation p-adique à $\overline{\mathbb{N}}$.

On peut remarquer que si l'ensemble des p tels que $v_p(x) \neq 0$ est fini, et si aucun $v_p(x) = \infty$, alors x est simplement un nombre entier naturel, (c'est à dire $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{SN}$). A noter que 0 n'est pas considéré comme un Supernaturel.

1.1.3 Table de multiplication

Il n'existe pas de définition naturelle d'une addition sur l'ensemble des Supernaturels (il est difficile de se faire une idée de la signification de $2^\infty + 3$)

La multiplication sur $\mathbb{SN}$ au contraire se définit de façon très naturelle (elle prolonge naturellement la multiplication sur $\mathbb{N}$) :

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(x)} \times \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(y)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(x) + v_p(y)}$$

On peut aussi définir la relation de divisibilité en prolongeant la divisibilité sur $\mathbb{N}$:

$$(x \mid y) \Leftrightarrow (\forall p \in \mathbb{P} (v_p(x) \leq v_p(y)))$$

$(\mathbb{SN}, \mid)$ est un ensemble partiellement ordonné, avec un minimum et un maximum.

Et, bien sur, on peut prolonger les notions de PPCM et de PGCD :

Pour une famille $(x_i)_{i \in I}$ de nombres Supernaturels :

$$\begin{aligned} - \text{PPCM}((x_i)_{i \in I}) &= \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\sup_{i \in I} (v_p(x_i))} \\ - \text{PGCD}((x_i)_{i \in I}) &= \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\inf_{i \in I} (v_p(x_i))} \end{aligned}$$

Ces définitions permettent de calculer le PPCM et le PGCD de toutes familles de nombres Supernaturels, donc en particulier d'une famille infinie de nombres entiers naturels (même si le PGCD peut être un nombre Supernaturel qui n'est pas un entier naturel).

Lorsque la famille est réduite à deux éléments, on note plutôt :

$$\begin{aligned} - x \vee y &= \text{PPCM}(x, y) \\ - x \wedge y &= \text{PGCD}(x, y) \end{aligned}$$

1.1.4 Propriétés algébriques

$(\mathbb{SN}, \vee, \wedge)$ est un treillis distributif complet (donc borné), pseudo-complémenté mais non complémenté, donc ce n'est pas une algèbre de Boole.

Le minimum de ce treillis est 1 et le maximum est $\omega = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^\infty$

Les atomes de ce treillis sont les nombres premiers.

C'est une algèbre de Heyting complète, c'est à dire un treillis borné, complet avec la propriété supplémentaire :

Pour tout a et tout b il existe un x maximum tel que $a \wedge x \leq b$; cet élément est le pseudo complément de a par rapport à b , et il est généralement noté $a \rightarrow b$

Le pseudo complément d'un élément est le pseudo complément de cet élément par rapport au minimum du treillis, généralement noté $\neg x$.

Soit a et b deux supernaturels, alors le pseudo complément de a par rapport à b , x est défini par (la vérification est triviale) :

$$v_p(x) = \begin{cases} v_p(a) \neq 0 & \Rightarrow v_p(b) \\ v_p(a) = 0 & \Rightarrow \infty \end{cases}$$

Dans le cas où $b = 0$, on trouve $\neg a$ le pseudo complément de a , dont on peut vérifier que $\neg a \vee a$, n'est généralement pas égal à ω (le maximum de $\mathbb{SN}$), et n'est donc pas un complément de a .

On peut munir $\mathbb{SN}$ de la topologie de Scott, c'est à dire une topologie dont une base d'ouverts est donnée par :

$$U_n = \{x \in \mathbb{SN} \mid v \geq n\} \text{ (la relation d'ordre étant la divisibilité)}$$

Cette topologie permet de définir la catégorie des multisets (une extension de la notion de multiset fini).

1.1.5 Synonymes, Isomorphismes, Exemples

Les nombres Supernaturels sont parfois appelés « Entiers naturels généralisés » ou « Nombres de Steinitz ».

On peut aussi, de façon très naturelle, définir $\mathbb{SN} = \overline{\mathbb{N}}^{\mathbb{P}}$, ou encore, de façon un peu moins naturelle (il suffit de changer l'interprétation) $\mathbb{SN} = \overline{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$

Une extension possible de $\mathbb{SN}$, est d'autoriser les $v_p(x)$ à prendre leur valeur dans $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$, avec les trois règles d'addition supplémentaires :

$$\begin{aligned} \infty + n &= \infty \\ -\infty + n &= -\infty \\ \infty - \infty &= 0 \end{aligned}$$

Néanmoins ce nouvel ensemble n'est pas un groupe pour la multiplication, cette opération n'étant pas régulière (elle n'est plus associative).

1.1.6 Utilisation en physique

Aucune référence attestant de l'utilisation des Supernaturels en physique n'a pu être trouvée.

1.1.7 Références

[Détails sur les extensions algébriques et les groupes profinis](#)

[Diagonal direct limits of monomial groups](#)

[Weakly locally finite MV-algebras and real-valued multisets](#)

[THE MODULAR REPRESENTATION THEORY OF PROFINITE GROUPS](#)