1 Problème

On note $S(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctionsn $f \ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathbb{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$,et procssédant la propriété suivante :

$$\forall (\alpha, \beta) \epsilon \mathbb{N}^2, \lim_{x \longrightarrow \pm\infty} x^{\alpha} d^{\beta} f(x) = 0$$

1. Montrer que toute fonction de $S(\mathbb{R})$ est bornée, et Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que $S(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $L^1_{Loc}(\mathbb{R})$.
3. Montrer que tout $a \epsilon \mathbb{R}^*_+$, la fonction : $x \longrightarrow \exp(-a^2 x)$ est dans $S(\mathbb{R})$.
4. Pour $f \epsilon S(\mathbb{R})$,prouver que la fonction $f\prime et\ x \longrightarrow xf(x)$ sont dans $S(\mathbb{R})$ pour $(\alpha, \beta) \epsilon \mathbb{N}^2$, que peut on dire de la fonction $x \longrightarrow x^{\alpha} d^{\beta} f(x)$.
5. Pour $a \epsilon \mathbb{R}$, et $x \longrightarrow \exp(-iax) f(x)$ est dans $S(\mathbb{R})$.