pour le jeudi 15 mars

Soit φ une application dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \qquad (1-\mathrm{e}^{-x})y'(x)+y(x)=\varphi(x).$$

Partie I. On note G et F les applications de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G(x)=\int_0^x \mathrm{e}^t\,\varphi(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x)=\frac{G(x)}{\mathrm{e}^x-1}.$$

1. Montrer que G et F sont des applications de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. a) Déterminer le développement limité de G au voisinage de 0 à l'ordre 2. En déduire le développement de F au voisinage de 0 à l'ordre 1 : $F(x)=\varphi(0)+\frac{x}{2}\varphi'(0)+o(x)$.
   b) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. On notera encore F la fonction prolongée. Préciser $F(0)$. Montrer que F est dérivable en 0 et préciser $F'(0)$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_0) \qquad (1-\mathrm{e}^{-x})y'(x)+y(x)=0.$$

   Indication : On pourra remarquer que $(\mathcal{E}_0)$ *est équivalente à* $y'(x)+\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}y(x)=0$.
4. Montrer que F vérifie $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. a) Exprimer la solution générale de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b) Vérifier que F est l'unique solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ possédant une limite finie quand x tend vers 0.
6. La fonction F est-elle une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+$?
7. On suppose, dans cette question, que l'application φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   a) Montrer que, pour tout x nombre réel strictement positif, on a $\varphi(x) \leqslant F(x)$. Ce résultat demeure-t-il pour $x=0$?
   b) Déduire du I. 7. a) que F est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Partie II. On suppose dans la suite du problème que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}.$$

1. a) Déterminer explicitement $F(x)$.
   b) Donner un développement limité de F à l'ordre 2 au voisinage de 0.
   c) Dresser le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}_+$.
2. On note Φ la primitive de F définie sur $\mathbb{R}_+$ et s'annulant en 0.
   a) Montrer que $\forall x \geqslant 4,\ x \leqslant \mathrm{e}^{x/2}-1$ puis que $\forall x \geqslant 4,\ F(x) \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x/2}+1} \leqslant \mathrm{e}^{-x/2}$. En déduire que la fonction Φ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
   b) Étudier les variations de Φ sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que $\Phi(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.