Exercice 1 : On recherche dans cet exercice un équivalent de $n!$ quand $n \to \infty$.

1. On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$.
   (a) Déterminer $f^{(n)}(x)$ pour tout entier naturel $n > 0$ et tout réel $x > -1$.
   (b) En déduire, pour tout $x \geq 0$, l'existence d'un réel $\alpha(x)$ vérifiant

$$\begin{cases} \frac{1}{(1+x)^4} \leq \alpha(x) \leq 1 \\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\alpha(x) \end{cases}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $g(n) = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - 1$.
   (a) Justifier pour tout entier naturel $n > 0$ l'encadrement :

$$0 \leq g(n) \leq \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n^3}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\alpha\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

   (b) Montrer que , pour $n \geq 4$, on a : $\alpha\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{3}$.
   (c) En déduire, pour tout $n \geq 4$ que

$$0 \leq g(n) \leq \frac{1}{12}\left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right]$$

   puis

$$0 \leq g(n) \leq \frac{1}{12}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right]$$

3. On considère la suite u définie, pour tout n entier naturel non nul, par son terme général

$$u_n = \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) + n$$

   (a) Exprimer $v_n = u_n - u_{n+1}$ en fonction de g et de n. Montrer que pour $n > 4$

$$\sum_{k=4}^{n-1} v_k = u_4 - u_n$$

   (b) Justifier l'encadrement pour tout $n > 4$

$$0 \leq \sum_{k=4}^{n-1} v_k \leq \frac{1}{36}$$

   En déduire que la suite u converge vers un réel C qui vérifie

$$u_4 - \frac{1}{36} \leq C \leq u_4$$

   (c) Montrer (en considérant son logarithme) que la quantité

$$\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}$$

   admet une limite strictement positive K lorsque n tend vers l'infini.
   En déduire l'équivalent $n! \sim Kn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$.
   (d) En utilisant la question 3b, donner un encadrement de K à 10^{-2} près.

Exercice 2 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on définit :

$$F = \{(x, y, z, t) \in E / \ x + 2y + 2z + t = 0\}, \ G = \{(a, 2a, 2a, a) \in E / \ a \in \mathbb{R}\}, \ \text{ et } H = \{(x, y, z, t) \in E / \ y = z = 0\}$$

1. (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension 3. En donner une base.
   (b) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E de dimension 1. En donner une base.
   (c) Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E.
2. On admet que H est un plan vectoriel de E.
   (a) Montrer que $\overrightarrow{u} = (1, 0, 0, 0)$ et $\overrightarrow{v} = (0, 0, 0, 1)$ forment une base de H. En déduire $\dim(H)$.
   (b) Donner un élément non nul de $H \cap F$. Qu'en conclure sur la dimension de $H \cap F$?
   (c) Donner un élément non nul de $H \setminus (H \cap F)$. Qu'en conclure sur la dimension de $H \cap F$?
   (d) Quelle est la dimension de $H \cap F$? En donner une base.
   (e) Donner $\dim(F + H)$. En déduire $F + H$.