Signature d'une permutation

Soit S_n l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$. Une permutation σ de S_n est notée de la manière suivante

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

On définit la fonction signature ε de S_n dans $\mathbb{R}$ par

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

$\prod\limits_{1 \leq i < j \leq n}$ signifie qu'on fait le produit de tous les élèments pour tout couple (i, j) dans

$$\{(k, l) \text{ avec } 1 \leq k \leq n \ , \ 1 \leq l \leq n \ , \text{ et } k < l\}.$$

Question 1
Déterminer la signature des permutations

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ainsi que celle de la fonction l'identité pour tout n.

Question 2
On considère l'ensemble $\mathcal{P}$ définit par

$$\mathcal{P} = \{(i, j) \text{ avec } 1 \leq i \leq n \ , \ 1 \leq j \leq n \ , \text{ et } i \neq j\}.$$

Montrer que pour toute permutation σ de S_n, $\quad \sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$,

où $\sigma(\mathcal{P}) = \{(\sigma(i), \sigma(j)) | (i, j) \in \mathcal{P}\}$

Question 3
Vérifier l'égalité suivante pour toute permutation σ

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

En déduire que

$$(\varepsilon(\sigma))^2 = \prod_{(i,j) \in \mathcal{P}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Question 4
Montrer que pour toute permutation σ , $\quad \varepsilon(\sigma) = \pm 1$.

(Indication : On pourra montrer en utilisant les questions précédentes que $(\varepsilon(\sigma))^2 = 1$.)

Question 5
Déterminer l'image de la signature. Rappel $Im(\varepsilon) = \{x | \exists \sigma \in S_n, \varepsilon(\sigma) = x\} = \{\varepsilon(\sigma) | \sigma \in S_n\}$.

Question 6
Montrer que $Im(\varepsilon)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$.

Question 7
Sur l'ensemble $\mathcal{P}$, on introduit la relation d'équivalence suivante :

Soit $(i, j) \in \mathcal{P}$ et $(k, l) \in \mathcal{P}$, $(i, j) \sim (k, l) \Leftrightarrow (i, j) = (k, l)$ ou $(i, j) = (l, k)$.

Les sceptiques peuvent démontrer qu'il s'agit bien d'une relation déquivalence.

On note $\mathcal{P}'$ l'ensemble quotient $\mathcal{P}/\sim$. Il s'agit simplement de l'ensemble des paires $\{i, j\}$ où contrairement aux éléments de $\mathcal{P}$, l'ordre n'a pas d'importance.

1. Montrer que pour toute paire $\{i, j\}$, l'on peut toujours choisir un représentant $(i, j) \in P$ tel que $i < j$.
2. Soit $\tau \in S(n)$, en déduire que
$$\varepsilon(\tau) = \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}'} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} \, .$$
.
3. Montrer que $\sigma(\mathcal{P}') = \mathcal{P}'$.
4. A l'aide des deux questions précédentes, montrer que
$$\varepsilon(\tau) = \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}'} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \, .$$
5. En conclure que la signature est un morphisme de groupes, càd :
$$\varepsilon(\tau \circ \sigma) = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)$$