Etude d'équation de degré 3

- **Méthode Homographique**
- **Etude de $f : x \to \dfrac{b}{a-x}$ et résolution de $x^3 + Ax + B = 0$**

On considère la matrice $M_f = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -1 & a \end{pmatrix}$, $M_f^3 = (a^2 - b)M_f - abI_2$ et soit l'équation caractéristique de

$M_f^3 est \ (E_c) : x^2 - (a^3 - 3ab)x + b^3 = 0$

On pose alors : $\begin{cases} -3b = A \Rightarrow b = -\dfrac{A}{3} \\ a^3 - 3ab = -B \Rightarrow a^3 + Aa + B = 0 \end{cases}$

Donc a est une racine de l'équation (E) : $x^3 + Ax + B = 0$ d'équation caractéristique associe a (E)

$(Ec) : x^2 - \dfrac{A^3}{27} = -Bx \Rightarrow x^2 + Bx - \dfrac{A_3}{27} = 0$ On note α^3 et β^3 les solutions de (Ec)

Par suite le nombre $a = \alpha + \beta$ est la solution cherché de (E).

Etude d'équation $(E_c) : x^2 + Bx - \dfrac{A^3}{27} = 0$, $\Delta = B^2 + \dfrac{4A^3}{27} = \dfrac{4A^3 + 27B^2}{27}$

1/ Δ = 0 on a une solution double $\alpha^3 = \beta^3 = \dfrac{-B}{2}$

$\alpha = \beta$ ou $\alpha = \beta j$ ou $\alpha = \beta j^2$ avec $1 + j + j^2 = 0$

donc $a = 2\left(\dfrac{-B}{2}\right)^{1/3}$ ou $a = \left(\dfrac{-B}{2}\right)^{1/3}(1+j)$ ou $a = \left(\dfrac{-B}{2}\right)^{1/3}(1+j)^2$

2/ Δ > 0 => $4A^3 + 27B^2 > 0$

Soit : $\alpha^3 = \dfrac{-B+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\beta^3 = \dfrac{-B-\sqrt{\Delta}}{2}$

Donc $\alpha_0 = \left(\dfrac{-B+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}$ et $\beta_0 = \left(\dfrac{-B-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}$

Ou $\alpha = \alpha_0$, $\alpha_0 j$ ou $\alpha_0 j^2$ $\beta = \beta_0$, $\beta_0 j$ ou $\beta_0 j^2$

=> $a_0 = \alpha_0 + \beta_0$ ou 0 $a = a_0$ ou α_{0j} ou α_{0j^2}

3/ Si $\Delta < 0$ => $4A^3 + 27B^2 < 0$ $\alpha^3 = \dfrac{-B + i\sqrt{-\Delta}}{2}$ et $\beta^3 = \dfrac{-B - i\sqrt{-\Delta}}{2}$

Donc a_0 , a_{0j} ou a_{0j^2} seront de même les solutions

$\left|\alpha^3\right|^2 = \dfrac{B^2 - \Delta}{4} = \dfrac{B^2 - B^2 - \dfrac{4A^3}{27}}{4} = \dfrac{-A^3}{27}$ Donc (A < 0)

$\left|\alpha^3\right|^2 = \left|\beta^3\right|^2 = (-\dfrac{A}{3})^3 \Rightarrow on \ \ pose \ : |\alpha| = |\beta| = (-\dfrac{A}{3})^{\frac{1}{2}} alors \ il$ Existe $\theta \in \mathbb{R}$ telque

α= $(-\dfrac{A}{3})^{\frac{1}{2}} e^{i\theta} \ et \ \beta = (-\dfrac{A}{3})^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta}$ donc $a_0 = 2(-\dfrac{A}{3})^{\frac{1}{2}} \cos(\theta + 2\dfrac{k\pi}{3})$,k=0,1,2 et $\cos(3\theta) = \dfrac{-B}{2}(\dfrac{-27}{A^3})^{\frac{1}{2}}$