Lycée Guez De Balzac

Année Scolaire 2009–2010

MATHÉMATIQUES MPSI

DS N° 7

Samedi 27/03/2010 (4h)

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction: les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées. La référence des questions doit obligatoirement être mentionnée et les résultats doivent être $\boxed{\textit{encadrés}}$.

La calculatrice et les formulaires sont interdits.

Exercice 1

Q1) Soient a, b deux entiers positifs premiers entre eux, et soient $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$. On considère le système de congruences :

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{lllr} n & \equiv & r_1 & [a] \\ n & \equiv & r_2 & [b] \end{array}\right.$$

a) Justifier l'existence de deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

b) Soit $r_0 = aur_2 + bvr_1$. Montrer que r_0 est une solution de (S).

c) En déduire que les solutions de (S) sont les entiers n tels que $n \equiv r_0\ [ab]$.

Q2) Application :

Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de N pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui ci reçoit 3 pièces.

Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces.

Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces.

Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

Exercice 2

$$\text{On note } \mathrm{F(X)} = \frac{\mathrm{X}^6 + 1}{(\mathrm{X}+1)^3(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)} \in \mathbb{R}(\mathrm{X}).$$

Q1) Factoriser $\mathrm{X}^6 + 1$ dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, en déduire que F(X) est irréductible.

Q2) Calculer E(X) la partie entière de la fraction F(X).

Q3) Justifier l'existence des nombres a, b, c, α et β tels que :

$$\mathrm{F(X)} = \mathrm{E(X)} + \frac{a}{\mathrm{X}+1} + \frac{b}{(\mathrm{X}+1)^2} + \frac{c}{(\mathrm{X}+1)^3} + \frac{\alpha \mathrm{X} + \beta}{\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1}$$

Sans calculer a**,** b **et** c, déterminer α et β en expliquant la méthode.

Q4) Soit $\mathrm{H(X)} = (\mathrm{X}+1)^3\mathrm{F(X)} = \dfrac{\mathrm{X}^6+1}{\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1}$.

a) Montrer que pour x réel : $\mathrm{H}(x) = c + b(x+1) + a(x+1)^2 + \underset{-1}{o}\big((x+1)^2\big)$.

b) Que représente cette égalité pour la fonction $x \mapsto \mathrm{H}(x)$ en -1 ?

c) Calculer soigneusement un développement limité d'ordre 2 en -1 de $\mathrm{H}(x)$. En déduire les valeurs numériques des nombres a, b et c (justifier).

Q5) Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{F}(x)$ sur $\mathrm{I} =]-1; +\infty[$.

Q6) a) Sans calcul, donner un équivalent très simple de $\mathrm{F}(x) - \mathrm{E}(x)$ en $+\infty$.

b) En déduire l'étude locale de la fonction $x \mapsto \mathrm{F}(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Problème

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, à tout élement P de E on fait correspondre le polynôme $u(P)$ défini par :

$$u(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'.$$

Partie I

Q1) Montrer que u est un endomorphisme de E. Calculer les images de la base canonique de E.

Q2) Calculer le rang de u, son noyau et son image (on en donnera une base et la dimension).

Q3) Déterminer une base et la dimension de $\ker(u - 2\mathrm{id}_E)$. Montrer que ce sous-espace contient un unique polynôme unitaire (à préciser), on le notera P_1.

Q4) Déterminer une base et la dimension de $\ker(u - 6\mathrm{id}_E)$. Montrer que ce sous-espace contient un unique polynôme unitaire (à préciser), on le notera P_2.

Q5) Soit $P_0 = 1$, montrer que $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de E. En déduire la relation :

$$u^3 - 8u^2 + 12u = 0.$$

Q6) Soit $Q \in \mathrm{Im}(u)$, montrer que les antécédents de Q par u sont les polynômes :

$$P = -\frac{1}{12}u(Q) + \frac{2}{3}Q + c \text{ avec } c \in \mathbb{K} \text{ quelconque.}$$

Q7) Montrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont supplémentaires dans E. Est-ce que u est un projecteur ?

Q8) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\ker(u^n) = \ker(u)$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Im}(u^n) = \mathrm{Im}(u)$.

Partie II

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E, pour tout entier naturel p on note $I_p = \mathrm{Im}(u^p)$ et $K_p = \ker(u^p)$.

Q1) Montrer que $\forall\, p \in \mathbb{N}, K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.

Q2) On suppose dans cette question que E est de dimension finie et u injectif, déterminer alors I_p et K_p pour $p \in \mathbb{N}$.

Q3) On suppose dans cette question de $\dim(E) = n \geqslant 1$ et que u est **non injectif**.

a) Que dire de la suite $(\dim(K_p))_{p\in\mathbb{N}}$? En déduire qu'il existe un plus petit entier $r \leqslant n$ tel que $K_r = K_{r+1}$.

b) Montrer qu'alors $I_r = I_{r+1}$, et que $\forall\, p \in \mathbb{N}, K_r = K_{r+p}$ et $I_r = I_{r+p}$.

c) Montrer que $E = I_r \oplus K_r$.

Q4) Lorsque E n'est pas de dimension finie, existe-t-il un plus petit entier r tel que $K_r = K_{r+1}$? On pourra étudier le cas de l'application $D : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ définie par $D(P) = P'$.

MPSI 2009–2010 DS N° 7: Corrigé

Exercice 1

Q1) a) a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de *Bezout*, il existe u et v entiers tels que $au+bv = 1$.

b) $r_0 \equiv bvr_1 \pmod a$ or $bv \equiv 1 \pmod a$ d'où $r_0 \equiv r_1 \pmod a$. De même, $r_0 \equiv aur_2 \pmod b$ or $au \equiv 1 \pmod b$ d'où $r_0 \equiv r_2 \pmod b$.

$$\boxed{r_0 \text{ est solution du système (S).}}$$

c) On en déduit que :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{S}) &\iff \left\{\begin{array}{ccc} n & \equiv & r_0 \quad [a] \\ n & \equiv & r_0 \quad [b] \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} a \mid n-r_0 \\ b \mid n-r_0 \end{array}\right. \\
&\iff \mathrm{PPCM}(a,b) \mid n-r_0 \\
&\iff ab \mid n-r_0 \\
&\iff \boxed{n \equiv r_0 \pmod{ab}}
\end{aligned}$$

Q2) Le système est (S) $\left\{\begin{array}{ccccc} n & \equiv & 3 & [17] \\ n & \equiv & 4 & [11] \\ n & \equiv & 5 & [6] \end{array}\right.$

$a = 17$ et $b = 11$ sont premiers entre eux, on a $17u+11v = 1$ avec $u = 2$ et $v = -3$, posons $r_0 = 17u4+11v3 = 37$, d'après la question précédente le système équivaut à (avec $11 \times 17 = 187$) :

$$\left\{\begin{array}{cccc} n & \equiv & 37 & [187] \\ n & \equiv & 5 & [6] \end{array}\right.$$

$a = 187$ et $b = 6$ sont premiers entre eux, on a $187u+6v = 1$ avec $u = 1$ et $v = -31$, posons $r_0 = 187u5+6v37 = -5947$, d'après la question précédente le système équivaut à $n \equiv -5947 \pmod{187 \times 6 = 1122}$, c'est à dire $n \equiv 785 \pmod{1122}$, $(-5947+6\times 1122 = 785)$ la valeur minimale de n est donc :

$$\boxed{n = 785.}$$

Exercice 2

Q1) On sait que $X^3+1 = (X+1)(X^2-X+1)$, en substituant X^2 à X, on a $X^6+1 = (X^2+1)(X^4-X^2+1)$, or $X^4-X^2+1 = (X^2+1)^2-3X^2$, d'où :

$$\boxed{X^6+1 = (X^2+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)}$$

Ces trois facteurs sont de degré 2 et sans racine réelle, donc irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Il n'y a donc pas de diviseur irréductible commun entre le numérateur et le dénominateur de $F(X)$, la fraction est donc sous forme irréductible.

Q2) La partie entière est le quotient du numérateur par le dénominateur, c'est à dire de X^6+1 par $(X+1)^3(X^2+X+1) = X^5+4X^4+\ldots$, ce qui donne :

$$\boxed{E(X) = X-4.}$$

Q3) On voit que -1 est un pôle triple de F et X^2+X+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, d'après le théorème de décomposition en éléments simples, il existe des réels a, b, c, α, β tels que :

$$F(X) = E(X) + \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{c}{(X+1)^3} + \frac{\alpha X+\beta}{X^2+X+1}$$

On multiplie tout par X^2+X+1 ce qui donne :

$$\frac{X^6+1}{(X+1)^3} = (X^2+X+1)\left[E(X) + \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{c}{(X+1)^3}\right] + \alpha X+\beta$$

puis on évalue en j (racine complexe de X^2+X+1), ce qui donne $\alpha j+\beta = \frac{j^6+1}{(1+j)^3} = \frac{2}{-j^6} = -2$, on en déduit que :

$$\boxed{\alpha = 0 \text{ et } \beta = -2.}$$

Q4) a) On a $H(X) = (X+1)^3F(X) = a(X+1)^2 + b(X+1) + c + (X+1)^3\left[E(X) + \frac{\alpha X+\beta}{X^2+X+1}\right]$, en évaluat en x ($\neq -1$), on obient $H(x) = c + b(x+1) + a(x+1)^2 + (x+1)^2\left[(x+1)E(x) + x(+1)\frac{\alpha x+\beta}{x^2+x+1}\right]$, comme le terme entre crochets tend vers 0 lorsque x tend vers -1, on peut écrire :

$$\boxed{H(x) = c + b(x+1) + a(x+1)^2 + \underset{-1}{o}\left((x+1)^2\right).}$$

b) Cette égalité représente un développement limité de la fonction $x \mapsto H(x)$ en -1 à l'ordre 2.

c) On pose $u = x+1$, d'où :

$$H(x) = \frac{(u-1)^6+1}{1+(u-1)+(u-1)^2} = \frac{2-6u+15u^2+\underset{0}{o}\left(u^2\right)}{1-u+u^2}$$

comme $u-u^2$ tend vers 0 en 0, on peut composer avec le développement de $\frac{1}{1-v} = 1+v+v^2+\underset{0}{o}\left(v^2\right)$, ce qui donne $\frac{1}{1-u+u^2} = 1+u+\underset{0}{o}\left(u^2\right)$, on termine en faisant le produit avec le développement du numérateur, ce qui donne :

$$\frac{2-6u+15u^2+\underset{0}{o}\left(u^2\right)}{1-u+u^2} = 2-4u+9u^2+\underset{0}{o}\left(u^2\right)$$

c'est à dire :

$$\boxed{H(x) = 2-4(x+1)+9(x+1)^2+\underset{-1}{o}\left((x+1)^2\right).}$$

Par unicité du éveloppement limité, on en déduit que : $\boxed{a = 9,\ b = -4 \text{ et } c = 2}$, d'où la décomposition de F :

$$\boxed{F(X) = X-4+\frac{9}{X+1}-\frac{4}{(X+1)^2}+\frac{2}{(X+1)^3}-\frac{2}{X^2+X+1}.}$$

Q5) Soit $I =]-1;+\infty[$, la fonction $x \mapsto F(x)$ est continue sur I, elle admet donc des primitives. Une primitive de :
* $x \mapsto x-4$ est $x \mapsto \frac{x^2}{2}-4x$.
* $x \mapsto \frac{9}{x+1}$ est $x \mapsto 9\ln(x+1)$.
* $x \mapsto -\frac{4}{(x+1)^2}$ est $x \mapsto \frac{4}{x+1}$.

* $x\mapsto \frac{2}{(x+1)^3}$ est $x\mapsto -\frac{1}{(x+1)^2}$.
* $x\mapsto -\frac{2}{x^2+x+1}$ est $x\mapsto -\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$, car :

$$\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

Une primitive de la fonction $x\mapsto \mathrm{F}(x)$ sur I est donc :

$$\boxed{x\mapsto \frac{x^2}{2}-4x+9\ln(x+1)+\frac{4}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}$$

Q6) a) $\mathrm{F}(x)-(x-4)=\frac{9}{x+1}-\frac{4}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^3}-\frac{2}{x^2+x+1}\underset{+\infty}{\sim}\frac{9}{x}$ car les termes suivants sont négligeables devant celui-ci en $+\infty$.

b) On a donc $\mathrm{F}(x)-(x-4)\xrightarrow[+\infty]{}0$ ce qui signifie que :

$$\boxed{\text{la droite } y=x-4 \text{ est asymptote à la courbe de F au voisinage de } +\infty.}$$

De plus $\mathrm{F}(x)-(x-4)=\frac{9}{x}\left[1+\underset{+\infty}{o}(1)\right]$, le crochet ayant pour limite 1, il est positif pour x assez grand, et donc :

$$\boxed{\text{la courbe sera au-dessus de l'asymptote au voisinage de } +\infty.}$$

Problème

Partie I

Q1) La linéarite de u ne pose pas de problème, d'autre part il est clair que $\deg(u(\mathrm{P}))\leqslant\deg(\mathrm{P})$ et donc $\boxed{u\in\mathscr{L}(\mathrm{E})}$. On a $\boxed{u(1)=0,\ u(\mathrm{X})=2\mathrm{X} \text{ et } u(\mathrm{X}^2)=6\mathrm{X}^2-2}$.

Q2) On voit que $1\in\ker(u)$, donc $\dim(\ker(u))\geqslant 1$. D'autre part $u(\mathrm{X})$ et $u(\mathrm{X}^2)$ sont non colinéaires dans $\mathrm{Im}(u)$, donc $\dim(\mathrm{Im}(u))\geqslant 2$, mais d'après le théorème du rang on doit avoir $\dim(\mathrm{E})=\dim(\ker(u))+\mathrm{rg}(u)=3$, d'où $\dim(\ker(u))=1$ et $\boxed{\mathrm{rg}(u)=2}$, on en déduit que $\boxed{\ker(u)=\mathrm{Vect}[1]=\mathbb{R}}$ et :

$$\boxed{\mathrm{Im}(u)=\mathrm{Vect}\left[u(\mathrm{X}),u(\mathrm{X}^2)\right]=\mathrm{Vect}\left[\mathrm{X},\mathrm{X}^2-\tfrac{1}{3}\right].}$$

Q3) Soit $v=u-2\mathrm{id}$, alors $v(1)=-2$, $v(\mathrm{X})=0$ et $v(\mathrm{X}^2)=4\mathrm{X}^2-2$, on a donc $\mathrm{Im}(v)=\mathrm{Vect}\left[-2,4\mathrm{X}^2-2\right]$ et donc $\mathrm{rg}(v)=2$, on en déduit que $\dim(\ker(v))=1$ d'où $\boxed{\ker(u-2\mathrm{id})=\mathrm{Vect}[\mathrm{X}]}$. On a donc une droite vectorielle, on voit que l'unique polynôme untaire sur cette droite est $\boxed{\mathrm{P}_1=\mathrm{X}}$.

Q4) Soi $w=u-6\mathrm{id}$, on a $w(1)=-6$, $w(\mathrm{X})=-4\mathrm{X}$ et $w(\mathrm{X}^2)=-2$, on a $\mathrm{Im}(w)=\mathrm{Vect}[-6,-4\mathrm{X}]$ donc $\mathrm{rg}(w)=2$ et $\dim(\ker(w))=1$, or $w(3\mathrm{X}^2-1)=0$ donc $\boxed{\ker(u-6\mathrm{id})=\mathrm{Vect}\left[3\mathrm{X}^2-1\right]}$, c'est une droite, on voit que l'unique polynôme unitaire sur cette droite est $\boxed{\mathrm{P}_2=\mathrm{X}^2-\frac{1}{3}}$.

Q5) Si $a\mathrm{P}_0+b\mathrm{P}_1+c\mathrm{P}_2=0$ alors le terme en X^2 est $c\mathrm{X}^2$, donc $c=0$, il reste alors $a\mathrm{P}_0+b\mathrm{P}_1=0$, le terme en X est $b\mathrm{X}$ donc $b=0$ puis $a=0$. La famille $(\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2)$ est libre de cardinal 3 dans un espace E de dimension 3, c'est donc une $\boxed{\text{base de E}}$.

Remarquons que $u^3-8u^2+12u=(u-6\mathrm{id})\circ(u-2\mathrm{id})\circ u$ et que ces composées sont commutatives. Par conséquent, si on pose $w=u^3-8u^2+12u$ alors $w(\mathrm{P}_0)=(u-6\mathrm{id})\circ(u-2\mathrm{id})\circ u(\mathrm{P}_0)=0$ car $\mathrm{P}_0\in\ker(u)$, $w(\mathrm{P}_1)=u\circ(u-6\mathrm{id})\circ(u-2\mathrm{id})(\mathrm{P}_1)=0$ car $\mathrm{P}_1\in\ker(u-2\mathrm{id})$, $w(\mathrm{P}_2)=u\circ(u-2\mathrm{id})\circ(u-6\mathrm{id})(\mathrm{P}_2)=0$ car $\mathrm{P}_2\in\ker(u-6\mathrm{id})$, par conséquent l'application w est nulle, c'est à dire : $\boxed{u^3-8u^2+12u=0}$.

Q6) Si $Q \in \mathrm{Im}(u)$ alors il existe $P \in e$ tel que $Q = u(P)$ donc $(u-6\mathrm{id})\circ(u-2\mathrm{id})(Q) = (u-6\mathrm{id})\circ(u-2\mathrm{id})\circ u(P) = 0$ c'est à dire en développant : $u^2(Q) - 8u(Q) + 12Q = 0$ et donc $Q = -\frac{1}{12}u^2(Q) + \frac{2}{3}u(Q) = u(-\frac{1}{12}u(Q) + \frac{2}{3}Q) = u(P)$, on en déduit que $P = -\frac{1}{12}u(Q) + \frac{2}{3}Q + c$ avec $c \in \ker(u)$ [équation linéaire], c'est à dire :

$$\boxed{P = -\frac{1}{12}u(Q) + \frac{2}{3}Q + c \text{ avec } c \in \mathbb{K}.}$$

Q7) On a $\ker(u) = \mathrm{Vect}[1] = \mathrm{Vect}[P_0]$, $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}[P_1, P_2]$ car $\mathrm{rg}(u) = 2$, et P_1, P_2 sont dans $\mathrm{Im}(u)$ [car $P_1 = u(\frac{1}{2}P_1)$ et $P_2 = u(\frac{1}{6}P_2)$]. Comme la famille (P_0, P_1, P_2) est une base de E, on a :

$$\boxed{E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)}.$$

On a $u^2(X) = u(2X) = 4X$ donc $u^2 \neq u$, $\boxed{u \text{ n'est pas un projecteur}}$.

Q8) Pour $n = 1$ l'égalité est évidente. Supposons l'égalité pour un entier n : $\ker(u) = \ker(u^n)$, on a $\ker(u) \subset \ker(u^{n+1})$, si $x \in \ker(u^{n+1})$ alors $u^{n+1}(x) = 0$ et donc $u(x) \in \ker(u^n)$, par conséquent, $u(x) \in \ker(u)$ or $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\}$, d'où $u(x) = 0$ *i.e.* $x \in \ker(u)$, finalement $\ker(u^{n+1}) = \ker(u)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ker(u^n) = \ker(u).}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$: on a l'inclusion, $\mathrm{Im}(u^n) \subset \mathrm{Im}(u)$, mais on a l'égalité de dimensions car en vertu du théorème du rang :

$$\mathrm{rg}(u^n) = \dim(E) - \dim(\ker(u^n)) = \dim(E) - \dim(\ker(u)) = \mathrm{rg}(u)$$

par conséquent : $\boxed{\mathrm{Im}(u^n) = \mathrm{Im}(u)}$.

Partie II

Q1) Si $x \in K_p$ alors $u^p(x) = 0$ d'où $u^{p+1}(x) = u(0) = 0$ et donc $x \in K_{p+1}$, *i.e.* $\boxed{K_p \subset K_{p+1}}$. Si $y \in I_{p+1}$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^{p+1}(y)$ et donc $y = u^p(u(x))$ d'où $y \in \mathrm{Im}(u)$ et $\boxed{I_{p+1} \subset I_p}$.

Q2) Si u est injectif et E de dimension finie, alors u est bijectif, *i.e.* $u \in GL(E)$, et donc $\forall p \in \mathbb{N}, u^p \in GL(E)$, par conséquent, $\boxed{K_p = \{0\} \text{ et } I_p = E}$.

Q3)

a) Supposons que $A = \{p \in [\![1..n]\!] \ / \ K_p = K_{p+1}\}$ est vide, alors $\forall p \in [\![1..n]\!], \dim(K_p) < \dim(K_{p+1})$ (car on a l'inclusion $K_p \subset K_{p+1}$), donc l'ensemble $\{\dim(K_p) \ / \ p \in [\![1..n+1]\!]\}$ contient $n+1$ éléments distincts et qui sont tous dans l'intervalle $[\![1..n]\!]$, ce qui est absurde donc l'ensemble A est non vide par conséquent il admet un minimum (car $A \subset \mathbb{N}$), il existe donc un plus petit entier $r \leqslant n$ tel que $\boxed{K_r = K_{r+1}}$.

b) On sait que $I_{r+1} \subset I_r$. D'après le théorème du rang on a :

$$\dim(I_r) = \dim(E) - \dim(K_r) = \dim(E) - \dim(K_{r+1}) = \dim(I_{r+1})$$

donc : $\boxed{I_r = I_{r+1}}$.

On montre par récurrence sur p que $K_r = K_{r+p}$, ceci est vrai pour $p = 0$, supposons que ce soit vrai pour un entier p, et montrons que $K_r = K_{r+p+1}$: on a $K_{r+p} \subset K_{r+p+1}$, soit $x \in K_{r+p+1}$ alors $u^{r+p+1}(x) = 0 = u^{r+1}[u^p(x)]$, donc $u^p(x) \in K_{r+1} = K_r$, donc $u^{r+p}(x) = 0$ *i.e.* $x \in K_{r+p}$ et donc $\boxed{K_{r+p+1} = K_{r+p} = K_r}$.

On montre ensuite avec le théorème du rang que $\boxed{I_{r+p} = I_r}$.

c) D'après le théorème du rang, $\dim(I_r) + \dim(K_r) = \dim(E)$, soit $x \in I_r \cap K_r$, alors $u^r(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = u^r(y)$, on a donc $u^{2r}(y) = 0$ *i.e.* $y \in K_{2r}$, mais $K_{2r} = K_r$ donc $u^r(y) = 0$ c'est à dire $x = 0$, la somme est directe et donc $\boxed{E = I_r \oplus K_r}$.

Q4) En reprenant la dernière question de la partie I : $E = \mathbb{K}[X]$ et $d : P \mapsto P'$, alors $K_0 = \{0\}$ et $\forall r \in \mathbb{N}^*, K_r = \mathbb{K}_{r-1}[X]$, on voit donc qu'il n'y a pas d'entier r tel que $K_r = K_{r+1}$. Par contre on peut remarquer sur cet exemple que $\forall r \in \mathbb{N}, I_r = I_{r+1} = E$.