# HECT1 — Devoir à rendre le jeudi 7 avril 2011

**EXERCICE UNIQUE**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{x-1}, & \text{si } x \in ]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[ \\ \alpha x^3 + \beta x, & \text{si } x \in ]0, 2[ \end{cases}$$

où $(\alpha, \beta)$ est un couple de nombres réels .

1. **a)** Étudier la continuité de $f$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

   **b)** Démontrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $(\alpha, \beta)$ est solution du système $(\mathcal{S})$ suivant :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} 4\alpha & +\beta & = 0 \\ 12\alpha & +\beta & = 0 \end{cases}$$

2. On suppose désormais que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

   **a)** Déterminer l'expression de $f(x)$ lorsque $x$ est un élément de $]0, 2[$.

   **b)** * Démontrer que la quantité $\dfrac{f(x) - f(2)}{x-2}$ admet une même limite à gauche et à droite au point $x = 2$.
   * Que peut-on en déduire pour la fonction $f$ ?
   * Que peut-on en déduire pour la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de $f$ ?

   **c)** * Démontrer que $f$ n'est pas dérivable en 0.
   * Préciser les équations des demi-tangentes à gauche et à droite au point d'abscisse 0 à la courbe $\mathscr{C}_f$.

3. **a)** * Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet, aux voisinages de plus l'infini et de moins l'infini, une asymptote oblique dont on précisera l'équation.
   * Préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette asymptote.

   **b)** Vérifier que $f\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ puis dresser le tableau de variations de $f$, dans lequel on indiquera les limites de $f$ en $\pm\infty$, les valeurs de $f$ en 0 et en 2 ainsi qu'au point où $f'$ s'annule.

   **c)** * Démontrer que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution $x_0$ dans $\mathbb{R}$ et que cette solution est négative.
   * Après avoir vérifié que, pour tout $x$ dans $\mathbb{R}_-$, l'équation $f(x) = -1$ équivaut à $x^2 - x - 1 = 0$, déterminer la valeur exacte de $x_0$.

   **d)** On donne $\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \simeq 1{,}2$, $f\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) \simeq -0{,}8$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0{,}6$ arrondis au dixième près.

   Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé d'unité 2 cm, en précisant son asymptote oblique, la tangente à $\mathscr{C}_f$ parallèle à l'axe $(Ox)$, la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2, les demi-tangentes à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 ainsi que le point de coordonnées $(x_0, -1)$.