Comment définir a puissance b ?

Nous nous intéressons ici au sens de a^b, avec $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Dans le cas où l'exposant est un entier, on sait définir la puissance par récurrence :

- $a^0 = 1$,
- $\forall n \in \mathbb{N},\ a^{n+1} = a.a^n$.

On a alors la propriété suivante : $\forall m, n \in \mathbb{N},\ a^{m+n} = a^m.a^n$. Essayons d'étendre l'exponentiation sur $\mathbb{R}$ en conservant cette propriété ; cherchons donc une application $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f_a(x+y) = f_a(x).f_a(y)$. Nous supposerons de plus que f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Remarquons d'abord que $f_a(0) = 1$. En effet, $f_a(0) = f_a(0+0) = f_a(0)^2$ donc soit $f_a(0) = 0$ soit $f_a(0) = 1$. Or, si $f_a(0) = 0$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) = f_a(x+0) = f_a(x).f_a(0) = 0$ et donc f_a est la fonction nulle. Souhaitant étendre l'exponentiation sur $\mathbb{N}$, qui est non identiquement nulle, on écarte ce cas et on trouve ainsi $f_a(0) = 1$.

Soit $(x, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. On a $\dfrac{f_a(x+h) - f_a(x)}{h} = f_a(x)\dfrac{f_a(h) - 1}{h} = f_a(x)\dfrac{f_a(h) - f_a(0)}{h}$. Ainsi, pour $h \to 0$: $f_a'(x) = f_a'(0)f_a(x)$. Par conséquent, f_a (si elle existe) est solution du système $\begin{cases} y' = ky \ (k \in \mathbb{R}) \\ y(0) = a \end{cases}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure alors l'existence et l'unicité de f_a.

Supposons $f_a'(0) = 0$. Alors f_a est constante et identiquement égale à a. Alors nécessairement, pour étendre l'exponentiation sur $\mathbb{N}$, on doit avoir $a = 1$. Nous supposerons dans la suite $a \neq 1$ (et donc $f_a'(0) \neq 0$).

Remarquons que f_a est strictement positive et strictement monotone. En effet, supposons qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $f_a(y) = 0$; alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) = f_a(x - y + y) = f_a(x-y)f_a(y) = 0$, ce qui est impossible f_a n'étant pas identiquement nulle. De plus, f_a est continue (puisque dérivable) et $f_a(0) = 1 > 0$, donc $f_a > 0$. On en déduit alors que $f_a' = f_a'(0)f_a > 0$ si $f_a'(0) > 0$ ou $f_a' < 0$ si $f_a'(0) < 0$; ainsi, f_a est strictement monotone.

Étudions les limites de f_a en $\pm\infty$. Distingons deux cas : si f_a est strictement croissante, alors f_a admet une limite finie en $-\infty$, que l'on notera provisoirement l_1, et soit f_a diverge vers l'infini en $+\infty$ soit elle y converge en une hypothétique limite l_2. En cas de convergence f_a' tend vers 0, donc l'équation différentielle de f_a implique $l_1 = l_2 = 0$. Il est cependant impossible que $l_2 = 0$, puisque $l_1 = 0$ et que f_a est strictement croissante. Donc $f_a(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f_a(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$

Si f_a est strictement décroissante, alors le même raisonnement conduit à $f_a(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f_a(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Une conséquence de ce qui précède est que f_a est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Nous pouvons donc définir sa réciproque $f_a^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. De plus, f_a' ne s'annulant jamais, f_a^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ayant par définition $f_a \circ f_a^{-1} = \mathrm{Id}$, on obtient dérivant : $(f_a^{-1})' = \dfrac{1}{f_a'(0)\,\mathrm{Id}}$. Donc f_a^{-1} est la primitve de $x \mapsto \dfrac{1}{f_a'(0)x}$ s'annulant en 1.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $g : y \mapsto f_a(yf_a^{-1}(x))$. On a $g(1) = f_a \circ f_a^{-1}(x) = x$. De plus, g est dérivable, et pour tout $y \in \mathbb{R}$, $g'(y) = f_a^{-1}(x)f_a'(yf_a^{-1}(x)) = f_a^{-1}(x)f_a'(0)f_a(yf_a^{-1}(x)) = f_x'(0)f_x(y)$. Par conséquent, g et f_x sont solutions de la même équation différentielle avec une même valeur particulière. Ainsi, $g = f_x$. Donc il suffit de connaître une seule fonction f_a pour pouvoir définir toutes les puissances du type étudié. D'après la caractérisation de f_a en terme de primitive, il est naturel de se donner la condition $f_a'(0) = 0$. Notons e un réel tel que cette condition soit vérifiée.

Remarquons d'abord que l'équation différentielle vérifiée par f_e implique que f_e soit de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du développement de Taylor avec reste intégral, $f_e(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_e^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f_e^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt$. Or pour tout $k \in \{1,..,n\}$, $f_e^{(k)} = f_e$ donc $f_e(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x f_e(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt$.
Or $0 \leq \displaystyle\int_0^x f_e(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \leq f_e(x)\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}dt = f_e(x)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, par croissance de f_e. De plus, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, $\dfrac{x}{k} \leq \dfrac{1}{2}$, donc $f_e(x)\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} = f_e(x)\displaystyle\prod_{k=1}^{N-1}\frac{x}{k}\prod_{k=N}^{n+1}\frac{x}{k} \leq f_e(x)\left(\prod_{k=1}^{N-1}\frac{x}{k}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, $\left|f_e(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On vérifie de plus que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{x^k}{k!}$ possède un rayon de convergence infini.

Par conséquent, f_e est une fonction analytique et $f_e : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$. Ainsi, f_e correspond à la fonction exponentielle telle qu'on la définit usuellement.

On en déduit également que $e = f_e(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ est la constante d'Euler (ou de Neper), ce qui implique l'unicité de e tel que nous l'avons défini.

Définissons donc, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $a^b = \exp(b\ln(a))$. On remarquera également que l'on retrouve l'expression que l'on souhaitait généraliser : pour tout $(a,x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$, $a^{x+y} = a^x.a^y$.