Chapitre 4

Transformation de Laplace

On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est localement sommable si elle est sommable sur tout sous ensemble E de $\mathbb{R}$ de mesure finie.

4.1 Définition

Définition :

Soit f localement sommable , nulle pour $t < 0$. On appelle transformée de Laplace l'application définie par :

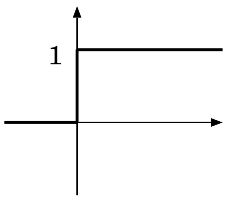
$$\mathcal{L}[f] : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ s & \longmapsto & \mathcal{L}[f](s) = \displaystyle\int f(t)\, e^{-st}\, d\mu(t) \end{cases}$$

Cette application existe sous réserve de sommabilité de la fonction $t \longmapsto f(t)\, e^{-st}$.

Exemples

- transformée de Laplace de l'échelon de Heaviside.

$$H(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$



$$\int H(t)\, e^{-st}\, d\mu(t) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt$$

C'est une intégrale impropre de Riemann divergente pour $s \leqslant 0$ et convergente pour $s > 0$. La transformée de Laplace de H n'est définie que pour $s > 0$ et dans ce cas :

$$\mathcal{L}(H)(s) = \frac{1}{s}$$

- la transformée de Laplace de l'échelon de Heaviside H translaté de $a > 0$ est $\mathcal{L}(H_a)(s) = \dfrac{1}{s}\, e^{-sa}$, $s > 0$
- Soit la fonction :

$$f(t) = \begin{cases} e^{(a+ib)\,t} & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad a,b \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s - (a + ib)} \quad \text{pour } s > a$$

4.2 Abscisse de sommabilité

Définition :

Soit f une application sommable et nulle pour $t < 0$.
On peut montrer qu'il existe $s_0 \in \mathbb{R}$, appelée abscisse de sommabilité de la transformée de Laplace de f, telle que :
- $\forall s > s_0$ la fonction $t \longmapsto f(t)\, e^{-st}$ est sommable (et donc la transformée de Laplace de f existe)
- $\forall s < s_0$ la fonction $t \longmapsto f(t)\, e^{-st}$ n'est pas sommable Pour $s = s_0$ il peut ou non y avoir sommabilité.

Remarque

- si $s_0 = -\infty$, la transformée de Laplace de f est définie sur tout $\mathbb{R}$
- si $s_0 = +\infty$, f n'admet pas de transformée de Laplace.

Proposition
Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $f = 0$ sur $\mathbb{R}_-$ alors $s_0 \leqslant 0$.

Proposition
Si, pour tout t suffisamment grand,

$$|f(t)| \leqslant A\, e^{kt}, \quad A \in \mathbb{R}_+^*,\ k \in \mathbb{R}$$

alors

$$s_0 \leqslant k$$

4.3 Propriétés de la transformée de Laplace

4.3.1 Premières propriétés

Propriétés

1. *La transformée de Laplace est une application linéaire*
2. *Soit f localement sommable, nulle pour $t < 0$. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On a :*

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a}\, \mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{a}\right) \qquad s > a s_0$$

3. *Avec les mêmes hypothèses et $a \in \mathbb{R}_+$, on a :*

$$\mathcal{L}[f(t-a)](s) = e^{-as}\, \mathcal{L}[f(t)](s) \qquad s > s_0$$

4. *Avec les mêmes hypothèses et $b \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\mathcal{L}[e^{bt}\, f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-b) \qquad s > s_0 + b$$

5. $\lim_{s \to +\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$

Théorème de la valeur initiale
Si quand t tend vers 0 f admet une limite à droite notée $f(0^+)$ alors :

$$\lim_{s \to +\infty} s\, \mathcal{L}[f](s) = f(0^+)$$

Théorème de la valeur finale
Si f admet une limite en $+\infty$, notée $f(+\infty)$, alors $s_0 \leqslant 0$ et :

$$\lim_{s \to 0} s\, \mathcal{L}[f](s) = f(+\infty)$$

4.3.2 Transformée de Laplace de la dérivée

Proposition

Soit f localement sommable, nulle pour $t < 0$, possédant sur $\mathbb{R}_+^*$ une dérivée continue (ou continue par morceaux), localement sommable. De plus on suppose que pour t assez grand,

$$|f(t)| \leqslant A\, e^{kt},\ (A,k) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$$

Alors :

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\, \mathcal{L}[f](s) - f(0^+) \qquad s > k$$

4.4 Produit de convolution

Proposition

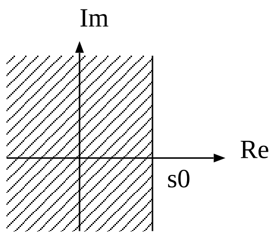
Soient f_1, f_2 deux fonctions localement sommables, nulles pour $t < 0$, d'abscisses de sommabilité respectives s_{01} et s_{02}.
On a alors, pour $s > s_0 = \max(s_{01}, s_{02})$

$$\mathcal{L}[f_1 * f_2] = \mathcal{L}[f_1]\, \mathcal{L}[f_2]$$

4.5 Analycité de la transformée de Laplace

On considère maintenant la transformée de Laplace comme une fonction de la variable complexe :

$$\mathcal{L}[f] : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ z & \longmapsto \quad \mathcal{L}[f](z) = \displaystyle\int f(t)\, e^{-zt}\, d\mu(t) \end{cases} \qquad \{z \in \mathbb{C} / Re(z) > s_0\}$$



Théorème

La transformée de Laplace est analytique sur le domaine de sommabilité $\{z \in \mathbb{C}/Re(z) > s_0\}$ et on a la formule :

$$\big(\mathcal{L}[f(t)](z)\big)^{(n)} = \mathcal{L}\big[(-t)^n f(t)\big](z)$$

4.6 Lien avec la transformée de Fourier

Proposition

Soit f localement sommable, nulle pour $t < 0$. On a, sur le domaine de sommabilité, en posant $z = x + iy$, et en raisonnant à $x > s_0$ fixé :

$$\mathcal{L}[f](z) = \int f(t)\, e^{-xt}\, e^{-iyt}\, d\mu(t) = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}\big[f(t)\, e^{-xt}\big](y)$$

4.7 Inversion de la transformée de Laplace

Proposition : formule de Bromvitch

On suppose que pour $x > s_0$, la fonction $y \mapsto \mathcal{L}[f](x + iy)$ est une fonction sommable. D'après les résultats sur la transformée de Fourier, on a, pour presque tout t :

$$\sqrt{2\pi}\, f(t)\, e^{-xt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathcal{L}[f](z)\, e^{iyt}\, d\mu(y) \qquad x > s_0$$

On a donc, presque partout, avec $V_x = \{z \in \mathbb{C}/Re(z) > s_0\}$:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{V_x} \mathcal{L}[f](z)\, e^{zt}\, dz = \frac{1}{2i\pi} \int \mathcal{L}[f](x+iy)\, e^{(x+iy)t}\, id\mu(y)}$$

Exemple

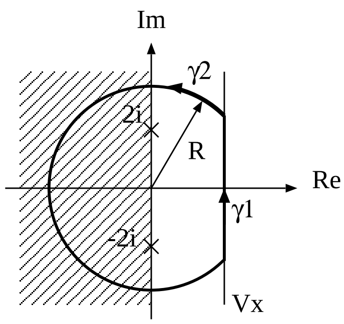
$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f est nulle pour $t < 0$ et localement sommable. On a :

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{s}{s^2+4} \qquad s > s_0 = 0$$

Transformée de Laplace inverse : $\displaystyle\frac{1}{2i\pi} \int_{v_x} \frac{z}{z^2+4}\, e^{zt}\, dz$ possède deux singularités en $\pm 2i$, avec :

$$\text{Res}\left(\frac{z}{z^2+4}\, e^{zt}, 2i\right) = \frac{e^{2it}}{2} \qquad ; \qquad \text{Res}\left(\frac{z}{z^2+4}\, e^{zt}, -2i\right) = \frac{e^{-2it}}{2}$$



$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} \frac{z}{z^2+4}\, e^{zt}\, dz = i\pi \left(e^{2it} + e^{-2it}\right)$$

Puis, en utilisant les lemmes de Jordan :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{v_x} \frac{z}{z^2+4}\, e^{zt}\, dz = \cos 2t$$

Transformées de Laplace usuelles (avec $f(t) = 0$ pour $t < 0$ et $t_0 > 0$)

$f(t)\ (t \geqslant 0)$	$\mathcal{L}[f](s)$	s_0
c	$\dfrac{c}{s}$	0
$c\,t^n$	$\dfrac{c\,n!}{s^{n+1}}$	0
$\sin bt$	$\dfrac{b}{s^2+b^2}$	0
$\cos bt$	$\dfrac{s}{s^2+b^2}$	0
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	a
$t^n\,e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	a
$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$	$\lvert a\rvert$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\lvert a\rvert$
$e^{at}\sin bt$	$\dfrac{a}{(s-a)^2+b^2}$	a
$e^{at}\cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	a
$t^{1/2}$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{s^3}\right)^{1/2}$	0
$t^{-1/2}$	$\left(\dfrac{\pi}{s}\right)^{1/2}$	0
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}	0
$H(t-t_0)$	$\dfrac{e^{-st_0}}{s}$	0