Monsieur Ibrahima GUEYE **Kaolack, le 28 Septembre 2011**

Adresse : Ouakam, Quartier Gouye Sor, Dakar – Sénégal

Téléphone: Portables : 00221775669457

Fixes : 00221338209052

00221338221746

Email: ibrahimaeygue@yahoo.fr

CARACTERE INFINI DU NOMBRE DE COUPLES DE PREMIERS JUMEAUX

Résumé :

Depuis deux millénaires, les nombres premiers n'ont cessé de fasciner les mathématiciens. En effet une conjecture qui remonterait à cette période stipule que le nombre de premiers jumeaux est infini. C'est ce que je me propose de démontrer dans ce document en partant du théorème de Wilson-Lagrange. L'étape suivante permettra d'aboutir à un résultat qui est un corollaire du théorème de Clément de 1949. Pour mémoire, le théorème de Clément a très vite eu la réputation d'être inefficace dans l'élaboration de nombres premiers jumeaux en raison de la factorielle. C'est l'association de ce théorème de Clément avec son corollaire précité qui m'ont permis d'aboutir au résultat voulu juste après une dernière étape où j'ai usé du raisonnement par l'absurde.

Démonstration :

On sait d'après le théorème de Wilson que (n + 2) premier sssi (n + 2) divise ((n + 1) ! + 1), n £ N*

Donc (n + 4) premier sssi (n + 4) divise ((n + 3) ! + 1).

Ainsi (n + 2) et (n + 4) forment un couple de nombres premiers jumeaux sssi : (n + 1) divise ((n + 1) ! + 1) et (n + 4) divise ((n + 3) ! + 1).

Soient a et b deux nombres entiers a et b différents de 0 tels que :

$$\left(\frac{(n + 1)\,! + 1}{n + 2} \right) = b \quad \text{et} \quad \left(\frac{(n + 3)\,! + 1}{n + 4} \right) = a$$

On démontre aisément que a > b

Donc il existe un entier naturel c tel que a = b + c ; c = a – b

$$c = \left(\frac{(n + 3)\,! + 1}{n + 4} \right) - \left(\frac{(n + 1)\,! + 1}{n + 2} \right)$$

. Après calculs on aboutit à :

$$c = \frac{(n^*+7n^2+15n+8)\,(n + 1)! - 2}{(n + 2)\,(n + 4)}\ ).$$

n* signifie n au cube

Donc (n+2) et (n+4) forment un couple de nombres premiers jumeaux si (n + 2) (n + 4) divise $(n^*+7n^2+15n+8)\,(n + 1)! - 2$

On a $(n+1)(n+2)(n+4)=n^*+7n^2+14n+8$. Donc :

$$c = \frac{(n^*+7n^2+14n+8)\,(n+1)\,!}{(n+2)(n+4)} + \frac{n\,(n+1)\,! - 2}{(n+2)(n+4)} = (n+1).(n+1)\,! + \frac{n(n+1)\,! - 2}{(n+2)(n+4)}$$

D'où (n+2) et (n+4) forment un couple de premiers jumeaux ssi (n + 2)(n + 4) divise (n(n+1) ! – 2).

On démontre facilement que ceci est un corollaire du théorème de Clément qui dit que n et (n+2) sont des nombres premiers jumeaux sssi n(n+2) divise (4 ((n-1)! + 1) + n). Ce qui revient à dire que (n+2) et (n+4) sont des nombres premiers jumeaux sssi (n+2) (n+4) divise (4 ((n+1)! + 1) + n+2).

Soit d et e £ N* tels que :

$$d = \frac{(4\,((n+1)! + 1) + n+2)}{(n+2)\,(n+4)}$$

et

$$e = \frac{n(n+1)\,! - 2}{(n+2)(n+4)}$$

Donc $4((n+1)! + 1) + n+2 = 0$ (modulo $(n+2)(n+4)$) et $n(n+1)! - 2 = 0$ (modulo $(n+2)(n+4)$)

Posons $4((n+1)! + 1) + n+2 = x$; $n(n+1)! - 2 = y$ et $(n+2)(n+4) = z$

⇔ $x = 0$ (modulo z) et $y = 0$ (modulo z) ⇔ $(x+y) = 0$ (modulo z)

Intéressons nous maintenant à la somme (e+d)

$$e+d = \frac{(4((n+1)! + 1) + n+2) + n(n+1)! - 2}{(n+2)(n+4)} = \frac{x+y}{z} = \frac{(n+1)! + 1}{(n+2)}$$

$(n+1)! + 1 = 0$ (modulo $(n+2)$)

Il existe une infinité de valeurs de n telles que $(n+1)! + 1 = 0$ (modulo $(n+2)$)

Donc il existe infinité de valeurs de n telles que $(x+y) = 0$ (modulo z)

D’après la relation d’équivalence entre le théorème de Clément et son corollaire décrit plus haut on peut dire que s’il existe infinité de valeurs de n telles que $(x+y) = 0$ (modulo z) alors il existe une infinité de valeurs de n telles que $x = 0$ (modulo z) et $y = 0$ (modulo z).

Ceci peut être démontré facilement en usant du raisonnement par l’absurde.

On sait qu’il existe une infinité de valeurs de n telles que $(x+y) = 0$ (modulo z)

Supposons que l’ensemble des valeurs de n telles $x = 0$ (modulo z) est fini. La relation de congruence est une relation d’équivalence : elle est réflexive, symétrique et transitive. Tenant compte de la relation d’équivalence entre le théorème de Clement de 1949 et son corollaire décrits plus haut on peut dire qu’alors l’ensemble des valeurs de n telles $y = 0$ (modulo z) est fini. On peut alors dire aussi qu’il existe un nombre fini de n tels que $(x+y) = 0$ (modulo z).

D’où l’absurdité. Ainsi notre supposition s’avère fausse.

Donc il existe bel et bien une infinité de valeurs de n £N* telles que $x = 0$ (modulo z) et $y = 0$ (modulo z).

D’où l’infinitude des nombres premiers jumeaux.

MERCI DE VOTRE ATTENTION