

# Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°4 - A remettre le mardi 11 octobre 2011

## « Matrices magiques »

---

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à deux,  $E_n$  désigne l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $I_n$  la matrice unité de  $E_n$ .

- Une matrice de  $E_n$  est dite *symétrique* si elle est égale à sa transposée.
- Une matrice de  $E_n$  est dite *antisymétrique* si elle est égale à l'opposé de sa transposée.
- Une matrice de  $E_n$  de terme général  $\alpha_{i,j}$  est dite *magique* si :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} = \sum_{k=1}^n \alpha_{k,j} = \sum_{k=1}^n \alpha_{k,k} = \sum_{k=1}^n \alpha_{k,n+1-k}$$

- $\mathcal{A}_n$  désigne l'ensemble des matrices antisymétriques de  $E_n$ .
- $\mathcal{S}_n$  désigne l'ensemble des matrices symétriques de  $E_n$ .
- $\mathcal{G}_n$  désigne l'ensemble des matrices magiques de  $E_n$ .

### Partie I : quelques généralités sur $\mathbf{A}_n$ , $\mathbf{S}_n$ et $\mathbf{G}_n$

1. Montrer que  $\mathcal{A}_n$  et  $\mathcal{S}_n$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E_n$ .
2. Montrer que  $\mathcal{G}_n$  est un sous-espace vectoriel de  $E_n$ .
3. On désigne par :  $p_n$  le projecteur de  $E_n$  sur  $\mathcal{A}_n$  parallèlement à  $\mathcal{S}_n$ .  
 $q_n$  le projecteur de  $E_n$  sur  $\mathcal{S}_n$  parallèlement à  $\mathcal{A}_n$ .  
Montrer que  $\mathcal{G}_n$  est stable par  $p_n$  et par  $q_n$ .

### Partie II : étude de $\mathcal{G}_3 \cap \mathcal{A}_3$ et $\mathcal{G}_3 \cap \mathcal{S}_3$

1. Déterminer toutes les matrices antisymétriques de  $\mathcal{G}_3$ .
2. Déterminer toutes les matrices symétriques de  $\mathcal{G}_3$ , après avoir déterminé celles dont la trace est nulle.
3. Justifier que  $\mathcal{G}_3 \cap \mathcal{A}_3$  et  $\mathcal{G}_3 \cap \mathcal{S}_3$  sont des sous-espaces supplémentaires de  $\mathcal{G}_3$ .
4. Préciser –en justifiant correctement– les dimensions des espaces  $\mathcal{G}_3 \cap \mathcal{A}_3$  et  $\mathcal{G}_3 \cap \mathcal{S}_3$ .

### Partie III : étude de $\mathcal{G}_3$

Soient les matrices :  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = {}^t A$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que  $(A, B, C)$  est une base de  $\mathcal{G}_3$ .
2. Calculer  $A^2$ ,  $B^2$ ,  $C^2$ ,  $AC$ ,  $BC$ ,  $CA$  et  $CB$ .  
Montrer que  $AB + BA \in \text{Vect}(I_3, C)$ .
3. Soient  $M$  et  $M'$  deux matrices magiques de  $E_3$ , on note  $(a, b, c)$  et  $(a', b', c')$  leurs coordonnées respectives dans la base  $(A, B, C)$ .
  - (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $(a, b, c)$  et  $(a', b', c')$  pour que le produit  $MM'$  soit également une matrice magique.
  - (b) En déduire toutes les matrices magiques qui s'écrivent comme produit de deux matrices magiques de  $E_3$ .
4. Montrer que le produit de toute matrice magique de  $E_3$  par une combinaison linéaire de  $C$  et  $I_3$  est encore une matrice magique.
5. Soit  $A$  une matrice magique ; montrer que les puissances paires de  $A$  ne sont pas magiques (sauf dans un cas particulier qu'on précisera) mais que les puissances impaires de  $A$  le sont.
6. À quelle(s) condition(s) une matrice magique  $A$  est-elle inversible ?
  - Calculer alors l'inverse de  $A$ .
  - Est ce que l'inverse de  $A$  est magique ?
  - Peut-on étendre aux exposants négatifs de  $A$  les résultats obtenus à la question précédente ?