ISFA, 2 - ème Année - M1, 2010-2011

Examen - Optimisation

Durée 2h - Notes de cours autorisées

Les 2 problèmes sont indépendants.

Problème 1.

On se donne $m, n \in I\!N^*, A$ une matrice carée réelle de taille n, **symétrique et positive définie**, $b, d_1, d_2, \cdots d_m$ des vecteurs de $I\!R^n$ et $c_1, c_2, \cdots c_m$ des constantes réelles. On considère l'application quadratique

$$J : I\!R^n \to I\!R, \quad J(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$$

(où $< \cdot, \cdot >$ représente le produit scalaire usuel en $I\!R^n$) et l'ensemble des contraintes:

$$U = \{x \in I\!R^n, \quad < d_i, x > \ \le c_i, \quad i = 1, 2, \cdots m\}.$$

On suppose $U \neq \emptyset$. On considère le problème de minimisation

$$\text{(1)} \qquad \text{Trouver } x^* \in U, \quad J(x^*) = \min_{x \in U} J(y).$$

a) Montrer qu'il existe une solution unique de (1).
b) Ecrire le lagrangien et le problème dual associés au problème de minimisation (1).
c) Ecrire l'algorithme d'Uzawa pour l'approximation numérique de la solution de (1). On note par $(x^{(k)}, p^{(k)}) \in I\!R^n \times I\!R^m_+$ la suite construite par cet algorithme ($p^{(0)} \in I\!R^n_+$ donné).
d) Montrer que pour un facteur $\rho > 0$ bien choisi, on a la convergence de $x^{(k)}$ vers x^* (les notations sont celles du cours).
e) *Cas particulier.* On considère ici
$m = 1, \ n = 2, \ c_1 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b = (2, 3)^T, \quad d_1 = (1, 1)^T.$$

e1) Montrer que $U \neq \emptyset$ et calculer la solution du problème (1) dans ce cas.

e2) En prennant $p^{(0)} = 0$ et $\rho = \frac{1}{3}$, calculer les deux premières itérations obtenues par l'algorithme d'Uzawa (calculer $x^{(0)}, \ p^{(1)}, \ x^{(1)}, \ p^{(2)}$).

Problème 2. (Un cas particulier de **pénalisation intérieure**)

Partie I

Soit $n \in I\!N$ avec $n \ge 2$ et $J : I\!R^n \to I\!R$ une fonction continue, coercive et strictement convexe. Dans la suite pour tout $\delta \ge 0$ on va noter $U_\delta = I\!R^{n-1} \times [\delta, +\infty[$ et
$U = I\!R^{n-1} \times]0, +\infty[$ (remarquer que U est l'intérieur de U_0).
Pour tout $k \in I\!N^*$ on introduit la fonction $J_k : U \to I\!R$ définie par

$$J_k(x) = J(x) + \frac{1}{kx_n}, \quad \forall \, x = (x_1, \cdots x_n)^T \in U.$$

Ia) Montrer que le problème: trouver $x^* \in U_0$ tel que

$$J(x^*) = \min_{y \in U_0} J(y) \tag{2}$$

a une solution et une seule.

Ib) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ le problème: trouver $x^{(k)} \in U$ tel que

$$J_k(x^{(k)}) = \min_{y \in U} J_k(y) \tag{3}$$

a une solution et une seule.

Indication: Montrer que pour $\delta > 0$ assez petit (à préciser) on a

$$\inf_{y \in U - U_\delta} J_k(y) > \inf_{y \in U_\delta} J_k(y).$$

Ic) Montrer que la suite $J(x^{(k)})$ est bornée et en déduire que la suite $x^{(k)}$ est bornée.

Id) Montrer que la suite $x^{(k)}$ converge vers x^* pour $k \to +\infty$.

Partie II: Application

On considère dans cette partie $n = 2$ et $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$J(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - x_2.$$

IIa) Montrer que les hypothèses de la **Partie I** sont satisfaites pour J.

IIb) Trouver la solution x^* du problème (2) dans ce cas.

IIc) Ecrire le problème satisfait par la solution $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right)^T$ de (3). En éliminant $x_1^{(k)}$ montrer que pour résoudre ce problème il suffit de résoudre une équation scalaire avec inconnue $x_2^{(k)}$. Montrer que cette équation a une solution strictement positive et une seule, et que cette solution appartient à l'intervalle $]1, 1 + \frac{1}{k}[$. En déduire que $x^{(k)} \to x^*$ pour $k \to +\infty$.