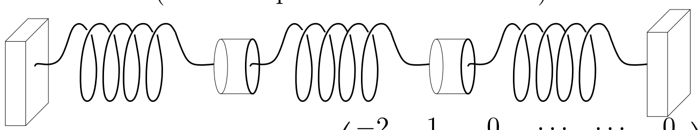
Université Paris-Sud 2003/2004
S3SMP/NFIO2

Feuille d'exercices de mathématiques n^{0}5

1. L'étude des vibrations d'une rangée de n masses égales reliées par des ressorts d'égales raideurs et fixés aux extrémités (voir manip installée en salle 206)



conduit à rechercher les vecteurs propres et valeurs propres de la matrice $A_N = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ à n lignes et n colonnes.

a) On suppose que $n = 2$. Déterminer les vecteurs propres et valeurs propres de A_2.
b) On revient à n quelconque. Soit k un entier compris entre 1 et n. On note v_k le vecteur de $\mathbf{R}^n$ dont la j-ème composante est $\sin(\frac{jk\pi}{n+1})$. Vérifier que v_k est un vecteur propre de A_n. Pour quelle valeur propre ? Existe-t'il d'autres valeurs propres, d'autres vecteurs propres ?
c) Montrer que A_n est inversible.
d) Que vaut la somme des valeurs propres de A_n ?

2. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & 7 & 3 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer ses valeurs propres, ses vecteurs propres. Est-elle diagonalisable ?
b) Quels sont les sous-espaces stables par l'action de M ?

3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes et dire si elles sont diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer ses valeurs propres, ses vecteurs propres. Est-elle diagonalisable ?
b) Montrer que pour une constante λ que l'on déterminera $N = A - \lambda I$ est nilpotente, c'est-à-dire vérifie $N^3 = 0$.
c) Calculer alors A^n.
d) Construire une base (e_1, e_2, e_3) telle que $N(e_1) = e_2$ et $N(e_2) = e_3$. Que vaut $N(e_3)$?

5. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\ker A + I$. Pour quelles valeurs de α cette matrice est diagonalisable?

6. On considère les matrices

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer de deux façons le polynôme caractéristique de S, soit en le développant, soit en le factorisant. Déterminer les valeurs propres et espaces propres de S, puis diagonaliser. Calculer enfin S^2.
b) Trouver deux vecteurs propres de A (sous la forme $e_i - e_j$) et déterminer leurs valeurs propres. Calculer $\det A$ et $\mathrm{tr} A$. En déduire les deux autres valeurs propres de A et les vecteurs propres associés.

7. Soit la matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer ses valeurs propres et ses espaces propres. Pour quelles valeurs de a la matrice A_a est-elle diagonalisable ?

8. On considère une application linéaire u de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ qui vérifie $u^2 = u \circ u = I$.
a) Montrer que $\ker(u+I) \cap \ker(u-I) = \{0\}$.
b) Vérifier que $\mathrm{im}(u+I) \subset \ker(u-I)$ et que $\mathrm{im}(u-I) \subset \ker(u+I)$.
c) En écrivant $x = (u+I)(\frac{x}{2}) + (u-I)(\frac{-x}{2})$, montrer que $\mathbf{R}^n = \mathrm{im}(u+I) + \mathrm{im}(u-I)$, puis compte-tenu de ce qui précède que $\mathbf{R}^n = \mathrm{im}(u+I) \oplus \mathrm{im}(u-I)$. En déduire que u est diagonalisable et que ses valeurs propres sont ± 1.
Etudier la réciproque.

9. Soit F, G deux sous-espaces de $\mathbf{R}^n$ supplémentaires, de sorte que tout vecteur $x \in \mathbf{R}^n$ s'écrit $x = y + z$ de façon unique avec $y \in F$, $z \in G$. On appelle projection de $\mathbf{R}^n$ sur F parallélement à G l'application $P(x) = y$ où $y \in F$ et $x - y = z \in G$.
a) Montrer que P est linéaire que F et G sont des espaces propres correspondant aux valeurs propres 1 et 0, enfin que P vérifie $P^2 = P$
b) Réciproquement, soit Q une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ qui vérifie $Q^2 = Q$. Montrer que c'est la projection de $\mathbf{R}^n$ sur $F = \mathrm{im}\, Q$ parallélement à $G = \mathrm{im}\,(I - Q)$.
c) Ecrire la matrice de la projection P sur le plan $\Pi = \{x + y + z = 0\}$ parallèlement à la droite $\mathbf{R}(1, 1, 1)$ qui lui est orthogonale. Diagonaliser P.

10. On note $\mathbf{R}_4[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 4. Soit k un réel fixé. On considère l'application T_k définie pour $P \in \mathbf{R}_4[X]$ par

$$T_k(P)(X) = (X^2 - 1)P'(X) - (4X + k)P.$$

a) Montrer que T_k est une application linéaire de $\mathbf{R}_4[X]$ dans lui même.
b) Ecrire la matrice de T_k dans la base $(1, X, X^2, X^3, X^4)$. Quelles sont ses valeurs propres et vecteurs propres ? A quelle condition T_k est-elle diagonalisable ?