

# Liens entres les notions de fermeture, de complétude et de compacité

Seirios

## Introduction

Notre but est ici de montrer les liens qui existent entre les notions de fermeture, de complétude et de compacité.

Les deux premiers paragraphes montrent que la complétude et la compacité d'un espace (respectivement métrique et topologique) peuvent être vues comme une fermeture universelle (théorèmes 1.1 et 2.1). Les démonstrations sont très semblables, elles reposent sur la possibilité de plonger un espace métrique, respectivement complètement régulier, dans un espace complet, respectivement compact.

Le troisième et dernier paragraphe montre un résultat plus connu, au moins dans le cadre métrique, faisant le lien entre les espaces compacts et complets (théorème 3.1). Ce résultat, immédiat pour les espaces métriques, peut s'étendre sur les espaces topologiques quelconques grâce à un résultat puissant : pour tout espace topologique compact, il existe une, et une seule, structure uniforme compatible avec la topologie.

## 1 Complétude et fermeture

**Théorème 1.1 :** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Alors  $X$  est complet si, et seulement si, pour tout espace métrique  $(Y, \delta)$  et pour toute isométrie  $i : X \rightarrow Y$ ,  $i(X)$  est fermé dans  $Y$ .

Avant de démontrer ce théorème, nous allons montrer qu'il est possible de plonger isométriquement tout espace métrique dans un espace métrique complet :

**Lemme :** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Alors il existe un espace métrique complet  $\widehat{X}$  et une isométrie  $i : X \rightarrow \widehat{X}$  tels que  $i(X)$  soit dense dans  $\widehat{X}$ <sup>1</sup>.

**Preuve :** Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des suites de Cauchy à valeurs dans  $X$ . Définissons la relation  $\mathcal{R}$  par :  $\forall (x_n)_n, (y_n)_n \in \mathcal{C}, ((x_n)_n \mathcal{R} (y_n)_n \Leftrightarrow d(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0)$ . Jusifions que la limite utilisée dans cette définition existe toujours<sup>2</sup>. Soient  $(x_n)_n, (y_n)_n \in \mathcal{C}$ . Soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $p, q \geq N$ ,  $d(x_p, x_q) \leq \epsilon/2$  et  $d(y_p, y_q) \leq \epsilon/2$ . Alors pour tout  $p, q \geq N$ ,  $d(x_p, y_p) - d(x_q, y_q) \leq d(x_p, x_q) + d(x_q, y_q) + d(y_q, y_p) - d(x_q, y_q) = d(x_p, x_q) + d(y_p, y_q) \leq \epsilon$ ; de même,  $d(x_q, y_q) - d(x_p, y_p) \leq \epsilon$ . On en déduit que  $(d(x_n, y_n))_n$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{R}$ , et converge donc par complétude de  $\mathbb{R}$ .

Remarquons que  $\mathcal{R}$  est clairement réflexive, symétrique. De plus, si  $(x_n)_n \mathcal{R} (y_n)_n$  et  $(y_n)_n \mathcal{R} (z_n)_n$  avec  $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n \in \mathcal{C}$ , alors  $d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , d'où  $(x_n)_n \mathcal{R} (z_n)_n$  c'est-à-dire que  $\mathcal{R}$  est transitive. Ainsi,  $\mathcal{R}$  définit une relation d'équivalence sur  $\mathcal{C}$ . Notons l'ensemble quotient  $\widehat{X} = \mathcal{C}/\mathcal{R}$ .

Définissons ensuite  $\delta : \begin{cases} \widehat{X} \times \widehat{X} & \rightarrow \mathbb{R} \\ ((x_n)_n, (y_n)_n) & \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) \end{cases}$ .

1. On appelle l'espace métrique ainsi construit le complété de  $(X, d)$ .

2. Cette étape n'est pas nécessaire à la bonne définition de  $\mathcal{R}$ , mais elle nous sera utile plus loin.

Nous avons déjà montré que la limite utilisée dans la définition de  $\delta$  existe. Montrons de plus que cette limite ne dépend pas des représentants des classes d'équivalence utilisés pour justifier la bonne définition de  $\delta$ . Soient donc  $(x_n)_n, (y_n)_n, (x'_n)_n, (y'_n)_n \in \widehat{X}$  avec  $(x_n)_n = (x'_n)_n$  et  $(y_n)_n = (y'_n)_n$  dans  $\widehat{X}$ . Alors  $d(x'_n, y'_n) - d(x_n, y_n) \leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n) - d(x_n, y_n) = d(x'_n, x_n) + d(y_n, y'_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ; on raisonne de même pour  $d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)$ . Ainsi,  $d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . On en déduit que  $\delta((x_n)_n, (y_n)_n) = \delta((x'_n)_n, (y'_n)_n)$ .

On remarque de plus que  $\delta$  acquière toutes les propriétés d'une distance grâce à  $d$ . Donc  $(\widehat{X}, \delta)$  est un espace métrique. Soit  $i : \begin{cases} X & \rightarrow \widehat{X} \\ x & \mapsto (x)_n \end{cases}$ . Montrons que le couple  $(\widehat{X}, i)$  vérifie les propriétés du théorème.

Soient  $x, y \in X$ . Alors  $\delta(i(x), i(y)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, y) = d(x, y)$ , donc  $i$  est une isométrie.

Soit  $(x_r)_r \in \widehat{X}$ . Montrons que  $(i(x_n))_n$  converge vers cet élément. Soient  $\epsilon > 0$  et  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $p, q \geq N$  entraîne  $d(x_p, x_q) \leq \epsilon$ . Alors pour tout  $n \geq N$ ,  $\delta((x_r)_r, i(x_n)) = \lim_{r \rightarrow +\infty} d(x_r, x_n) \leq \epsilon$ , donc  $(i(x_n))_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (x_r)_r$ . Ainsi,  $i(X)$  est dense dans  $\widehat{X}$ .

Montrons enfin que  $\widehat{X}$  est complet. Soit  $((x_{nk})_{n \in \mathbb{N}})_{k \in \mathbb{N}} \in \widehat{X}^{\mathbb{N}}$  une suite de Cauchy. Par densité de  $i(X)$  dans  $\widehat{X}$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $y_k \in X$  tel que  $\delta((x_{nk})_n, i(y_k)) \leq 1/k$ . Soient  $\epsilon > 0$  et  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $p, q \geq N$ ,  $\delta((x_{np})_n, (x_{nq})_n) \leq \epsilon$ . Alors pour tout  $p, q \geq N$ ,  $d(y_p, y_q) = \delta(i(y_p), i(y_q)) \leq \delta((x_{np})_n, i(y_p)) + \delta((x_{np})_n, (x_{nq})_n) + \delta((x_{nq})_n, i(y_q)) \leq \epsilon + 1/p + 1/q$ , donc  $(y_n)_n$  est une suite de Cauchy dans  $X$ . Soit  $x \in \widehat{X}$  un représentant de  $(y_n)_n$ . Alors pour tout  $\epsilon > 0$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  suffisamment grand,  $\delta((x_{nk})_n, x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_{nk}, y_n) \leq 1/k \leq \epsilon$ , donc  $(x_{nk})_n \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x$ .  $\widehat{X}$  est donc bien complet.  $\square$

**Preuve du théorème 1.1 :** Supposons  $X$  complet. Soit  $(i(x_n))_n \in i(X)^{\mathbb{N}}$  une suite convergente dans  $Y$ ; notons  $y \in Y$  sa limite. En particulier, c'est une suite de Cauchy. Soient  $\epsilon > 0$  et  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $p, q \geq N$ ,  $\delta(i(x_p), i(x_q)) < \epsilon$ ; ainsi, pour tout  $p, q \geq N$ ,  $d(x_p, x_q) < \epsilon$  c'est-à-dire que  $(x_n)_n$  est une suite de Cauchy.  $X$  étant par hypothèse complet,  $(x_n)_n$  converge dans  $X$ ; notons  $x \in X$  sa limite. Alors pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $d(x_n, x) = \delta(i(x_n), i(x)) < \epsilon$ . Par conséquent,  $(i(x_n))_n$  converge vers  $i(x)$ . Par unicité de la limite, on a  $y = i(x)$  c'est-à-dire  $y \in i(X)$ . Donc  $i(X)$  est fermé dans  $Y$ .

Réciproquement, supposons que pour tout espace métrique  $(Y, \delta)$  et pour toute isométrie  $i : X \rightarrow Y$ ,  $i(X)$  est fermé dans  $Y$ . Notons  $i$  l'isométrie entre  $X$  et l'espace métrique  $(\widehat{X}, \delta)$  tel que construits par le lemme précédent. Alors  $i(X)$  est fermé dans  $\widehat{X}$ ; or  $i(X)$  est dense dans  $\widehat{X}$ , donc  $i(X) = \widehat{X}$ . Soit  $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$  une suite de Cauchy. Alors pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $p, q \geq N$ ,  $d(x_p, x_q) = \delta(i(x_p), i(x_q)) < \epsilon$ . Par conséquent,  $(i(x_n))_n$  est une suite de Cauchy; or  $i(X)$  est complet donc cette suite converge, notons  $i(x) \in i(X)$  sa limite. Ainsi, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $\delta(i(x_n), i(x)) = d(x_n, x) < \epsilon$ . Donc  $(x_n)_n$  est convergente. On en conclut que  $X$  est complet.  $\square$

Remarquons que dans cette preuve, le fait que  $i$  soit une isométrie est primordial. Mais on peut se demander s'il est possible d'affaiblir cette hypothèse. S'il était possible de l'affaiblir en une hypothèse de continuité indépendante de la métrique, il se pourrait même que ce résultat puisse être généralisé aux espaces uniformes. Le contre-exemple suivant montre cependant que ces espoirs sont vains (on peut néanmoins moins montrer qu'en remplaçant l'hypothèse d'isométrie par une hypothèse de continuité uniforme, la réciproque reste vraie) :

Soit  $f : \begin{cases} [1, +\infty[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$ . Alors pour tout  $x, y \in [1, +\infty[$ ,  $|f(x) - f(y)| = \left| \frac{y-x}{xy} \right| \leq |y-x|$ , c'est-à-dire que  $f$  est 1-lipschtzienne, hypothèse à peine moins forte que l'isométrie. Pourtant,  $i([1, +\infty[) = ]0, 1]$  n'est pas fermé dans  $\mathbb{R}$  alors que  $[1, +\infty[$  est complet.

## 2 Compacité et fermeture

**Théorème 2.1 :** Soit  $X$  un espace topologique complètement régulier<sup>3</sup>. Alors  $X$  est compact si, et seulement si, pour tout espace topologique séparé  $Y$  et pour toute application continue  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f(X)$  est fermé dans  $Y$ .

Donnons d'abord quelques définitions utiles pour la suite :

**Définition :** Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est :

- $(T_0)$  si pour tout  $x, y \in X$ , il existe un ouvert  $O \subset X$  tel que  $x \in O$  et  $y \notin O$  ou  $x \notin O$  et  $y \in O$ ,
- $(T_2)$  si pour tout  $x, y \in X$  distincts, il existe deux ouverts disjoints  $U, V$  tels que  $x \in U$  et  $y \in V$ ,
- $(T_{3\frac{1}{2}})$  si pour tout fermé  $F \subset X$  et tout  $x \in X \setminus F$ , il existe une fonction continue  $f : X \rightarrow [0, 1]$  telle que  $f(x) = 1$  et  $f|_F = 0$ ,
- $(T_4)$  si pour tous fermés disjoints  $F, G$  de  $X$ , il existe deux ouverts disjoints  $U, V$  tels que  $F \subset U$  et  $G \subset V$ .

**Définition :** Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est un espace :

- de Kolmogorov si  $X$  est  $(T_0)$ ,
- séparé si  $X$  est  $(T_2)$ ,
- de Tychonov ou complètement régulier si  $X$  est  $(T_2)$  et  $(T_{3\frac{1}{2}})$ ,
- normal si  $X$  est  $(T_2)$  et  $(T_4)$ .

**Définition :** Soient  $X$  un espace topologique,  $(Y_\lambda)_{\lambda \in L}$  une famille d'espaces topologiques et  $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$  une famille d'applications où pour tout  $\lambda \in L$ ,  $f_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda$ . On dit que la famille  $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$  :

- sépare les points de  $X$  si pour tout  $x, y \in X$  distincts, il existe  $\lambda \in L$  tel que  $f_\lambda(x) \neq f_\lambda(y)$ ,
- sépare les points et les fermés de  $X$  si pour tout fermé  $A \subset X$  et pour tout  $x \in X \setminus A$ , il existe  $\lambda \in L$  tel que  $f_\lambda(x) \notin \overline{f_\lambda(A)}$ .

Ensuite, rappelons quelques résultats de topologie élémentaire :

**Lemme 1 :** Soient  $X$  un espace topologique quasi-compact,  $Y$  un espace topologique séparé et  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. Alors  $f(X)$  est quasi-compact dans  $Y$ .

**Preuve :** Soit  $(\Omega_i)_{i \in I}$  un recouvrement d'ouverts de  $f(X)$ , c'est-à-dire  $f(X) = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ . On

a donc  $X \subset f^{-1}(f(X)) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} \Omega_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(\Omega_i)$ . Par continuité de  $f$ , on en déduit que  $(f^{-1}(\Omega_i))_{i \in I}$  est un recouvrement d'ouverts de  $X$ . Par compacité de  $X$ , il existe une partie finie  $J \subset I$  telle que  $(f^{-1}(\Omega_i))_{i \in J} = X$ . Fixons une telle partie  $J$ . Alors  $f(X) = f\left(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(\Omega_i)\right) = \bigcup_{i \in J} f(f^{-1}(\Omega_i)) \subset \bigcup_{i \in J} \Omega_i$ . Ainsi,  $(\Omega_i)_{i \in J}$  est un sous-recouvrement de  $f(X)$ , montrant que  $f(X)$  est bien quasi-compact.  $\square$

**Lemme 2 :** Soient  $X$  un espace topologique compact et  $Y$  une partie de  $X$ . Si  $Y$  est fermé dans  $X$ , alors il est compact.

**Preuve :** Soit  $(O_i \cap Y)_{i \in I}$  un recouvrement d'ouverts de  $Y$ . Alors  $X = \bigcup_{i \in I} (O_i \cup X \setminus Y)$ ,

donc  $(O_i \cup X \setminus Y)_{i \in I}$  définit un recouvrement d'ouverts de  $X$  puisque  $Y$  est fermé. Il existe donc  $J \subset I$  fini tel que  $X = \bigcup_{i \in J} (O_i \cup X \setminus Y)$ . Ainsi,  $Y = Y \cap \bigcup_{i \in J} (O_i \cup X \setminus Y) = \bigcup_{i \in J} (O_i \cap Y)$ ,

c'est-à-dire que nous avons extrait du recouvrement  $(O_i \cap Y)_{i \in I}$  un sous-recouvrement fini. Par conséquent,  $Y$  est une partie compact de  $X$ .  $\square$

3. Cette hypothèse n'est en fait pas contraignante. On peut en effet montrer que tout espace compact est complètement régulier.

**Lemme 3 :** Soient  $X$  un espace topologique séparé et  $Y$  une partie compacte de  $X$ . Alors  $Y$  est fermée dans  $X$ .

**Preuve :** Soit  $x \in X \setminus A$ .  $X$  étant séparé, pour tout  $y \in X$ , il existe deux ouverts  $U_y$  et  $V_y$  tels que  $x \in V_y$ ,  $y \in U_y$  et  $V_y \cap U_y = \emptyset$ . Ainsi  $(U_y)_{y \in A}$  est un recouvrement d'ouverts de  $A$ . Par compacité de  $A$ , il existe un sous-recouvrement fini  $(U_y)_{y \in K}$  de  $A$  que nous fixons. Alors  $\bigcap_{y \in K} V_y$  est ouvert contenant  $x$ , puisque produit fini d'ouverts contenant  $x$ . De plus,  $A \cap \left( \bigcap_{y \in K} V_y \right) \subset \bigcap_{y \in K} (V_y \cap U_y) = \emptyset$ , ce qui montre que  $X \setminus A$  est ouvert ou bien que  $A$  est fermé.  $\square$

Voici un des résultats à la base de la preuve du théorème 2.1 :

**Théorème 2.2 :** Un espace topologique est complètement régulier si, et seulement si, il est homéomorphe à un sous-espace d'un cube  $[0, 1]^I$ .

Avant démontrer ce théorème, intéressons-nous aux lemmes suivants :

**Lemme 4 :** Soient  $X$  un espace topologique,  $(Y_\lambda)_{\lambda \in L}$  une famille d'espaces topologiques,  $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$  une famille d'applications continues où pour tout  $\lambda \in L$ ,  $f_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda$ . Soit  $e :$

$$\begin{cases} X & \rightarrow & \prod_{\lambda \in L} Y_\lambda \\ x & \mapsto & (f_\lambda(x))_{\lambda \in L} \end{cases} . \text{ Alors :}$$

(i)  $e$  est une application continue.  
(ii) Supposons que  $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$  sépare les points et les fermés de  $X$ . Alors  $e$  est une application ouverte de  $X$  dans  $e(X)$ .  
(iii)  $e$  est injective si, et seulement si,  $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$  sépare les points de  $X$ .

**Preuve :** Montrons (i). Soit  $O$  un ouvert de  $\prod_{\lambda \in L} Y_\lambda$ . Par caractérisation de la topologie produit, on peut écrire  $O = \prod_{\lambda \in L} O_\lambda$ , avec  $O_\lambda \subset Y_\lambda$  des ouverts tels que  $O_\lambda = Y_\lambda$  sauf pour un nombre fini d'indices, que nous noterons  $K$ . Par continuité, pour tout  $\lambda \in K$ , il existe un ouvert  $\Omega_\lambda \subset X$  tel que  $f_\lambda(\Omega_\lambda) \subset O_\lambda$ . Notons  $\Omega_\lambda = X$  pour  $\lambda \notin K$  et posons  $\Omega = \bigcap_{\lambda \in L} \Omega_\lambda$ ; l'intersection étant finie, c'est un ouvert de  $X$ . Alors  $e(\Omega) = (f_\lambda(\Omega))_{\lambda \in L} \subset \left( \bigcap_{\mu \in L} f_\mu(\Omega_\mu) \right) \subset (f_\lambda(\Omega_\lambda))_{\lambda \in L} \subset \prod_{\lambda \in L} O_\lambda = O$ . Ainsi,  $e$  est continue.

Montrons (iii) :

$$\begin{aligned} e \text{ injective} &\Leftrightarrow \forall x, y \in X, (e(x) = e(y)) \Rightarrow (x = y), \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in X, (\forall \lambda \in L, f_\lambda(x) = f_\lambda(y)) \Rightarrow (x = y), \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in X, (x \neq y) \Rightarrow (\exists \lambda \in L, f_\lambda(x) \neq f_\lambda(y)), \\ &\Leftrightarrow (f_\lambda)_{\lambda \in L} \text{ sépare les points de } X. \end{aligned}$$

Montrons (ii). Soient  $U$  un ouvert de  $X$  et  $e(x) \in e(U)$ . Comme  $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$  sépare les points et les fermés de  $X$ , il existe  $\mu \in L$  tel que  $f_\mu(x) \notin \overline{f_\mu(X \setminus U)}$ . Alors  $\Omega = \left( \prod_{\lambda \in L \setminus \{\mu\}} Y_\lambda \right) \times \left( Y_\mu \setminus \overline{f_\mu(X \setminus U)} \right)$  est un ouvert de  $\prod_{\lambda \in L} Y_\lambda$  et  $e(x) \in \Omega \cap e(X)$ , c'est-à-dire que  $e(U)$  est un ouvert de  $e(X)$ . Ainsi,  $e$  est une application ouverte.  $\square$

**Lemme 5 :** Soit  $X$  un espace topologique  $(T_0)$  et  $(T_{3\frac{1}{2}})$ . Alors  $X$  est homéomorphe à un sous-espace d'un cube  $[0, 1]^I$ .

**Preuve :** Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$  la famille des applications continues de  $X$  dans  $[0, 1]$ . Posons  $e :$

$$\begin{cases} X & \rightarrow & [0, 1]^L \\ x & \mapsto & (f_\lambda(x))_{\lambda \in L} \end{cases} .$$

D'après le lemme 4, il suffit de montrer que la famille  $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$  sépare les points de  $X$  puis sépare les points et les fermés de  $X$  pour montrer que  $e$  définit un homéomorphisme entre  $X$  et  $e(X) \subset [0, 1]^L$ .

Soient  $x, y \in X$  distincts. Comme  $X$  est  $(T_0)$ , il existe un ouvert  $U$  contenant uniquement l'un des deux points  $x$  et  $y$ . Sans perte de généralité, supposons que  $x \in U$  et  $y \notin U$ . Alors  $X \setminus U$  est fermé et ne contient que le point  $y$ . Puisque  $X$  est  $(T_{3\frac{1}{2}})$ , il existe une application  $g : X \rightarrow [0, 1]$  continue telle que  $g|_{X \setminus U} = 0$  et  $g(x) = 1$ . En particulier,  $g(x) \neq g(y)$ . Or  $g$  appartient à la famille  $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$  donc  $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$  sépare les points de  $X$ . Soient  $F$  un fermé et  $x \in X \setminus F$ . Comme  $X$  est  $(T_{3\frac{1}{2}})$ , il existe une application  $h : X \rightarrow [0, 1]$  continue telle que  $h|_F = 0$  et  $h(x) = 1$ . En particulier,  $h(x) \notin \overline{h(F)} = \{0\}$  et comme  $h$  appartient à la famille  $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ , on en déduit que  $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$  sépare les points et les fermés de  $X$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Lemme 6 :** Pour tout ensemble non vide  $I$ ,  $[0, 1]^I$  est complètement régulier.

**Preuve :** Soient  $F \subset [0, 1]^I$  un fermé et  $x = (x_i)_{i \in I} \notin F$ . Alors  $[0, 1]^I \setminus F$  est voisinage ouvert de  $x$ , donc il existe une partie finie  $J \subset I$  et un réel  $\epsilon > 0$  tels que  $\prod_{i \in J} ]x_i - \epsilon, x_i + \epsilon[ \times \prod_{i \in I \setminus J} [0, 1]$ . Pour tout  $j \in J$ , soit  $g_j : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  affine par morceaux telle que  $g_j$  vaut 1 en  $x_j$  et 0 sur  $[0, 1] \setminus ]x_j - \epsilon, x_j + \epsilon[$ . Posons ensuite  $f = \prod_{j \in J} g_j \circ \text{pr}_j$ . Les  $g_j$  étant continues, il en est de même pour  $f$ . De plus,  $f(x) = \prod_{j \in J} g_j(x_j) = 1$ . Ensuite, soit  $y = (y_i)_{i \in I} \in F$ . Alors il existe  $k \in J$  tel que  $y_k \notin ]x_k - \epsilon, x_k + \epsilon[$ . Alors  $g_k \circ \text{pr}_k(y) = g_k(y_k) = 0$ , donc  $f(y) = 0$ . On a donc montré que  $f|_F = 0$ . Par conséquent,  $f$  convient pour montrer que  $[0, 1]^I$  est complètement régulier.  $\square$

Nous pouvons dès lors revenir au théorème 2.2 :

**Preuve du théorème 2.2 :** Soit  $X$  un espace topologique. Supposons  $X$  complètement régulier. Alors, puisque  $(T_2)$  implique  $(T_0)$ ,  $X$  est  $(T_0)$  et  $(T_{3\frac{1}{2}})$ , et  $X$  est homéomorphe à un sous-espace d'un cube  $[0, 1]^I$  d'après le lemme 5<sup>4</sup>. Réciproquement, supposons  $X$  homéomorphe à un sous-espace d'un cube  $[0, 1]^I$ . Or ce sous-espace est complètement régulier, puisque  $[0, 1]^I$  est lui-même complètement régulier (lemme 6), par conséquent  $X$  est nécessairement complètement régulier.  $\square$

Voici enfin le second théorème à la base de la démonstration du théorème 2.1. Combiné au théorème 2.2, il permet de montrer que tout espace complètement régulier peut être plongé de manière homéomorphe dans un espace compact :

**Théorème 2.3 :** (de *Tykhonov*) Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques séparés. Alors  $\prod_{i \in I} X_i$  est compact si, et seulement si, pour tout  $i \in I$ ,  $X_i$  est compact.

**Preuve :** Supposons  $\prod_{i \in I} X_i$  compact. Soit  $i \in I$ . Par définition de la topologie produit,

$\text{pr}_i : \prod_{j \in I} X_j \rightarrow X_i$  est continue, et puisque  $X_i$  est séparé, on en déduit que  $X_i = \text{pr}_i \left( \prod_{j \in I} X_j \right)$  est compact (lemme 1).

Réciproquement, supposons que pour tout  $i \in I$ ,  $X_i$  soit compact. Soit  $\mathfrak{U}$  un ultrafiltre sur  $\prod_{i \in I} X_i$ . Alors pour tout  $i \in I$ ,  $\text{pr}_i(\mathfrak{U})$  est une base d'ultrafiltre sur  $X_i$  qui converge vers un point  $a_i \in X_i$  par compacité. Notons  $a = (a_i)_{i \in I}$ . Montrons que  $\mathfrak{U}$  converge vers  $a$ . Soit  $V$  un ouvert contenant  $a$ . On peut écrire  $V = \prod_{i \in I} O_i$  avec les  $O_i$  ouverts et  $O_i = X_i$  sauf pour un nombre fini d'indices. Notons  $K = \{i \in I \mid O_i \neq X_i\}$ . Alors pour tout  $i \in K$ , il existe  $B \in \mathfrak{U}$  tel que  $\text{pr}_i(B) \subset O_i$ ; comme  $B \subset \text{pr}_i^{-1}(\text{pr}_i(B)) \subset \text{pr}_i^{-1}(O_i)$ , on a  $\text{pr}_i^{-1}(O_i) \in \mathfrak{U}$ . Finalement, on a  $V = \bigcap_{i \in I} \text{pr}_i^{-1}(O_i) = \bigcap_{i \in K} \text{pr}_i^{-1}(O_i) \in \mathfrak{U}$  puisque  $K$  est fini. Donc  $\mathfrak{U}$  est convergent et  $\prod_{i \in I} X_i$  est compact.  $\square$

Démontrons enfin notre théorème principal :

4. L'adhérence de l'image de  $X$  par l'homéomorphisme construit dans la preuve du lemme 5 est appelé le compactifié de Stone-Ćech, noté  $\beta X$ .

**Preuve du théorème :** Supposons que  $X$  soit compact. Soient  $Y$  un espace topologique séparé et  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. Alors  $f(X)$  est une partie quasi-compacte de  $Y$  (lemme 1). Or  $Y$  est séparé, donc  $f(X)$  également c'est-à-dire que  $f(X)$  est compact. Il est par conséquent fermé dans  $Y$  (lemme 3).

Réciproquement, supposons que pour tout espace topologique séparé  $Y$  et pour toute application continue  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f(X)$  soit fermé dans  $Y$ .  $X$  étant complètement régulier, il existe un cube  $[0, 1]^I$  et une application continue  $f : X \rightarrow [0, 1]^I$  telle que  $X$  soit homéomorphe à  $f(X)$  (théorème 2.2). Or  $[0, 1]^I$  est compact (théorème de Tychonov) et par hypothèse  $f(X)$  est fermé dans  $[0, 1]^I$ , donc  $f(X)$  est compact (lemme 2).  $X$  étant homéomorphe à un espace topologique compact, il est lui-même compact, ce qui achève la démonstration.  $\square$

### 3 Compacité et complétude

**Théorème 3.1 :** Soit  $X$  un espace topologique compact. Alors il existe une unique structure uniforme  $\mathcal{U}$  compatible avec la topologie de  $X$ . De plus, muni de cette structure uniforme,  $X$  est complet et précompact.

Réciproquement, si  $X$  est un espace uniforme complet et précompact, alors  $X$  est compact.

Avant de démontrer ce théorème, intéressons-nous au lemme suivant :

**Lemme :** Soit  $(X, \mathcal{U})$  un espace uniforme. Notons  $\mathfrak{S}$  l'ensemble des entourages symétriques de  $X$ . Alors pour tout  $V \in \mathfrak{S}$  et pour tout  $M \subset X \times X$ ,  $VMV$  est un voisinage de  $M$ . De plus,  $\overline{M} = \bigcap_{V \in \mathfrak{S}} VMV$ . On en déduit notamment que  $X \times X$  admet un système fondamental d'entourages fermés.

**Preuve :** Toute structure uniforme admettant une base d'entourages symétriques, on supposera dans cette preuve que tous les entourages seront symétriques. Soit  $M \subset X \times X$ . Remarquons que  $M \subset V \circ M \circ V$  et que pour tout  $(x, y) \in M$ ,  $V(x) \times V(y) \subset V \circ M \circ V$ . En effet, la première inclusion est immédiate, puis pour tout  $(x, y) \in M$  et pour tout  $(p, q) \in V(x) \times V(y)$ , on a  $(p, x), (y, q) \in V$  c'est-à-dire  $(p, q) \in V \circ M \circ V$ . Or  $V(x) \times V(y)$  est un voisinage de  $(x, y)$ , donc  $V \circ M \circ V$  est bien un voisinage de  $M$ .

Pour la deuxième affirmation, puisque  $\{V(x) \times V(y), V \in \mathfrak{S}\}$  est une base de voisinage de  $(x, y) \in X$ , on a :

$$\begin{aligned} (x, y) \in \overline{M} &\Leftrightarrow \forall W \in \mathcal{V}(x, y), W \cap M \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall V \in \mathfrak{S}, M \cap V(x) \times V(y) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall V \in \mathfrak{S}, \exists (p, q) \in M, (p, q) \in V(x) \times V(y) \\ &\Leftrightarrow \forall V \in \mathfrak{S}, (x, y) \in V \circ M \circ V \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in \bigcap_{V \in \mathfrak{S}} V \circ M \circ V \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $U \in \mathcal{U}$ , il existe  $W \in \mathfrak{S}$  tel que  $\overset{3}{\overline{W}} \subset U$ , et alors  $\overline{W} = \bigcap_{V \in \mathfrak{S}} V \circ W \circ V \subset$

$\overset{3}{W} \subset U$ , donc  $\{\overline{W}, W \in \mathfrak{S}\}$  est une base d'entourages fermés de  $\mathcal{U}$ , prouvant la troisième affirmation du lemme.  $\square$

**Preuve du théorème 3.1 :** Soit  $X$  un espace topologique compact. Supposons que  $X$  soit uniformisable, et notons  $\mathcal{U}$  une structure uniforme compatible avec sa topologie. Soit  $V \in \mathcal{U}$  symétrique. Alors d'après le lemme,  $\overset{2}{\overline{V}} = V \circ \Delta \circ V$  est un voisinage de  $\Delta$ . Comme tout espace uniforme admet un système fondamental d'entourages symétriques, on en déduit que nécessairement tout élément de  $\mathcal{U}$  est un voisinage de  $\Delta$ .

Par l'absurde, supposons qu'il existe un voisinage  $V$  de  $\Delta$  n'appartenant pas à  $\mathcal{U}$ . On sait néanmoins que pour tout  $W \in \mathcal{U}$ ,  $W \setminus V \neq \emptyset$ . Ainsi,  $\{W \setminus V, W \in \mathcal{U}\}$  engendre un filtre  $\mathfrak{F}$  sur  $X \times X$ , qui doit admettre un point d'adhérence  $a \notin \Delta$ . Or si  $a$  est adhérent à  $\mathfrak{F}$ , alors il est également adhérent à  $\mathcal{U}$ , donc  $a \in \bigcap_{W \in \mathcal{U}} \overline{W}$ . D'après le lemme,  $\mathcal{U}$  admet un système fondamental d'entourages fermés. De plus,  $X$  est séparé, donc il existe  $U, W \in \mathcal{U}$  fermés tels que  $U(x) \cap W(y) = \emptyset$ . Donc  $x \notin W(y)$ , c'est-à-dire  $(x, y) \notin W$  et  $(x, y) \notin \bigcap_{W \in \mathcal{U}} \overline{W}$ . Par conséquent,  $\bigcap_{W \in \mathcal{U}} \overline{W} \subset \Delta$ , ce qui est contradictoire.

Nous avons donc démontré que si  $X$  est uniformisable, alors  $\mathcal{U}$  est l'ensemble des voisinages de  $\Delta$ . Montrons que  $\mathcal{U}$  est bien une structure uniforme. Comme  $(x, y) \mapsto (y, x)$  est une application continue, on en déduit que pour tout  $V \in \mathcal{U}$ ,  $V^{-1} \in \mathcal{U}$ . Supposons par l'absurde qu'il existe  $A \in \mathcal{U}$  tel que pour tout  $W \in \mathcal{U}$ ,  $W \setminus A \neq \emptyset$ . Alors  $\{W \setminus A, W \in \mathcal{U}\}$  engendre un filtre  $\mathfrak{F}$  sur  $X \times X$ , qui doit avec un point adhérent  $(x, y) \notin \Delta$ . Comme  $X$  est en particulier normal, il existe deux fermés disjoints  $V_1, V_2$  et deux ouverts disjoints  $U_1, U_2$  tels que  $x \in V_1 \subset U_1$  et  $y \in V_2 \subset U_2$ . Posons  $U_3 = X \setminus (V_1 \cup V_2)$  et  $W = \bigcup_{i=1}^3 U_i \times U_i$ . Alors  $W$  est un voisinage de  $\Delta$ , donc  $W \in \mathcal{U}$  et en particulier  $W \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset$ . Soit donc  $(a, b) \in W \cap (V_1 \times V_2)$ . Alors il existe  $c \in X$  tel que  $(a, c), (c, b) \in W$ . Or  $a \in V_1 \subset U_1$  implique que  $c \in U_1$ , puis  $c \in U_1$  implique que  $b \in U_1$ . Ainsi,  $b \in U_1 \cap V_2 \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , ce qui est impossible. Par conséquent, pour tout  $V \in \mathcal{U}$ , il existe  $W \in \mathcal{U}$  tel que  $W \subset V$ . On en déduit que  $\mathcal{U}$  est une structure uniforme.

Pour montrer que  $X$  est bien uniformisable, il nous reste donc à montrer que  $\mathcal{U}$  est compatible avec la topologie de  $X$ . Pour plus clarté, notons  $T_C$  la topologie compacte de  $X$  et  $T_U$  la topologie induite par  $\mathcal{U}$  sur  $X$ . Soient  $x \in X$  et  $V$  un voisinage de  $x$  pour  $T_U$ . Alors il existe  $W \in \mathcal{U}$  tel que  $W(x) \subset V$ . Soit  $\pi_x : \begin{cases} (X, T_C) & \rightarrow & (X \times X, T_C \times T_C) \\ y & \mapsto & (x, y) \end{cases}$ . Comme  $\pi_x$  est continue et que  $W(x) = \pi_x^{-1}(W)$ , on en déduit que  $W(x)$  est un entourage de  $x$  pour  $T_C$ . Puisque  $W(x) \subset V$ ,  $V$  est par conséquent un voisinage de  $x$  pour  $T_C$ . Ainsi,  $T_U$  est moins fine que  $T_C$ , et en particulier,  $\text{Id} : (X, T_C) \rightarrow (X, T_U)$  est continue. De plus, nous avons montré précédemment que  $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \bar{U} \subset \Delta$ . L'inclusion inverse est immédiate, donc  $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \bar{U} = \Delta$ , c'est-à-dire que la topologie  $T_U$  est séparée, donc  $\text{Id}$  est fermée. Par conséquent,  $\text{Id}$  est un homéomorphisme, c'est-à-dire que  $T_C = T_U$ .

Munissons  $X$  de la structure uniforme  $\mathcal{U}$ . Alors tout filtre de Cauchy admet un point d'adhérence, et converge donc. Ainsi,  $X$  est complet. On en déduit que le complété  $\widehat{X} = X$  est compact, et donc que  $X$  est précompact.

Réciproquement, soit  $X$  un espace uniforme complet et précompact. Alors le complété de  $\widehat{X} = X$  est compact, ce qui achève la démonstration.  $\square$

## Références

F. Guenard et G. Lelievre, *Compléments d'analyse. Volume 1, topologie*, Cahiers de Fontenay (1981).

N. Bourbaki, *Topologie générale. Chapitre de 1 à 4*, Springer (1971).

J. Marco, *Analyse L3*, Pearson Education (2009).

Et merci à Ksilver pour m'avoir donné les idées de base de ce document !