

Liens entres les notions de fermeture, de complétude et de compacité

Seirios

Introduction

Notre but est ici de montrer les liens qui existent entre les notions de fermeture, de complétude et de compacité.

Les deux premiers paragraphes montrent que la complétude et la compacité d'un espace (respectivement métrique et topologique) peuvent être vues comme une fermeture universelle (théorèmes 1.1 et 2.1). Les démonstrations sont très semblables, elles reposent sur la possibilité de plonger un espace métrique, respectivement complètement régulier, dans un espace complet, respectivement compact.

Le troisième et dernier paragraphe montre un résultat plus connu, au moins dans le cadre métrique, faisant le lien entre les espaces compacts et complets (théorème 3.1). Ce résultat, immédiat pour les espaces métriques, peut s'étendre sur les espaces topologiques quelconques grâce à un résultat puissant : pour tout espace topologique compact, il existe une, et une seule, structure uniforme compatible avec la topologie.

1 Complétude et fermeture

Théorème 1.1 : Soit (X, d) un espace métrique. Alors X est complet si, et seulement si, pour tout espace métrique (Y, δ) et pour toute isométrie $i : X \rightarrow Y$, $i(X)$ est fermé dans Y .

Avant de démontrer ce théorème, nous allons montrer qu'il est possible de plonger isométriquement tout espace métrique dans un espace métrique complet :

Lemme : Soit (X, d) un espace métrique. Alors il existe un espace métrique complet \widehat{X} et une isométrie $i : X \rightarrow \widehat{X}$ tels que $i(X)$ soit dense dans \widehat{X} ¹.

Preuve : Soit \mathcal{C} l'ensemble des suites de Cauchy à valeurs dans X . Définissons la relation \mathcal{R} par : $\forall (x_n)_n, (y_n)_n \in \mathcal{C}, ((x_n)_n \mathcal{R} (y_n)_n \Leftrightarrow d(x_n, y_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0)$. Justifions que la limite utilisée dans cette définition existe toujours². Soient $(x_n)_n, (y_n)_n \in \mathcal{C}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$, $d(x_p, x_q) \leq \epsilon/2$ et $d(y_p, y_q) \leq \epsilon/2$. Alors pour tout $p, q \geq N$, $d(x_p, y_p) - d(x_q, y_q) \leq d(x_p, x_q) + d(x_q, y_q) + d(y_q, y_p) - d(x_q, y_q) = d(x_p, x_q) + d(y_p, y_q) \leq \epsilon$; de même, $d(x_q, y_q) - d(x_p, y_p) \leq \epsilon$. On en déduit que $(d(x_n, y_n))_n$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{R} , et converge donc par complétude de \mathbb{R} .

Remarquons que \mathcal{R} est clairement réflexive, symétrique. De plus, si $(x_n)_n \mathcal{R} (y_n)_n$ et $(y_n)_n \mathcal{R} (z_n)_n$ avec $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n \in \mathcal{C}$, alors $d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, d'où $(x_n)_n \mathcal{R} (z_n)_n$ c'est-à-dire que \mathcal{R} est transitive. Ainsi, \mathcal{R} définit une relation d'équivalence sur \mathcal{C} . Notons l'ensemble quotient $\widehat{X} = \mathcal{C}/\mathcal{R}$. Si $(x_n)_n \in \mathcal{C}$, on notera $\widehat{(x_n)_n}$ l'élément de \widehat{X} associé.

Définissons ensuite : $\delta : \left\{ \begin{array}{ll} \widehat{X} \times \widehat{X} & \rightarrow \mathbb{R} \\ \widehat{(x_n)_n}, \widehat{(y_n)_n} & \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) \end{array} \right.$

1. On appelle l'espace métrique ainsi construit le complété de (X, d) .
2. Cette étape n'est pas nécessaire à la bonne définition de \mathcal{R} , mais elle nous sera utile plus loin.

Nous avons déjà montré que la limite utilisée dans la définition de δ existe. Montrons de plus que cette limite ne dépend pas des représentants des classes d'équivalence utilisés pour justifier la bonne définition de δ . Soient donc $(\widehat{x_n}_n), (\widehat{y_n}_n), (\widehat{x'_n}_n), (\widehat{y'_n}_n) \in \widehat{X}$ avec $(x_n)_n, (x'_n)_n$ et $(y_n)_n, (y'_n)_n$ des représentants d'une même classe. Alors $d(x'_n, y'_n) - d(x_n, y_n) \leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n) - d(x_n, y_n) = d(x'_n, x_n) + d(y_n, y'_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$; on raisonne de même pour $d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)$. Ainsi, $d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit que $\delta(\widehat{(x_n)_n}, \widehat{(y_n)_n}) = \delta(\widehat{(x'_n)_n}, \widehat{(y'_n)_n})$.

On remarque de plus que δ acquière toutes les propriétés d'une distance grâce à d . Donc (\widehat{X}, δ) est un espace métrique. Soit $i : \begin{cases} X & \rightarrow \widehat{X} \\ x & \mapsto \widehat{(x)_n} \end{cases}$. Montrons que le couple (\widehat{X}, δ) vérifie les propriétés du théorème.

Soient $x, y \in X$. Alors $\delta(i(x), i(y)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, y) = d(x, y)$, donc i est une isométrie.

Soit $\widehat{(x_n)_n} \in \widehat{X}$. Montrons que $(i(x_n))_n$ converge vers cet élément. Soient $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $p, q \geq N$ entraîne $d(x_p, x_q) \leq \epsilon$. Alors pour tout $n \geq N$, $\delta(\widehat{(x_k)_k}, i(x_n)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} d(x_k, x_n) \leq \epsilon$, donc $(i(x_n))_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \widehat{(x_n)_n}$. Ainsi, $i(X)$ est bien dense dans \widehat{X} .

Montrons enfin que \widehat{X} est complet. Soit $(\widehat{(x_{nk})_{n \in \mathbb{N}}})_{k \in \mathbb{N}} \in \widehat{X}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Par densité de $i(X)$ dans \widehat{X} , pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_k \in X$ tel que $\delta(\widehat{(x_{nk})_{n \in \mathbb{N}}}, i(y_k)) \leq 1/k$. Soient $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$, $\delta(\widehat{(x_{np})_{n \in \mathbb{N}}}, \widehat{(x_{nq})_{n \in \mathbb{N}}}) \leq \epsilon$. Alors pour tout $p, q \geq N$, $d(y_p, y_q) = \delta(i(y_p), i(y_q)) \leq \delta(\widehat{(x_{np})_{n \in \mathbb{N}}}, i(y_p)) + \delta(\widehat{(x_{np})_{n \in \mathbb{N}}}, \widehat{(x_{nq})_{n \in \mathbb{N}}}) + \delta(\widehat{(x_{nq})_{n \in \mathbb{N}}}, i(y_q)) \leq \epsilon + 1/p + 1/q$, donc $(y_n)_n$ est une suite de Cauchy dans X . Soit $\widehat{x} \in \widehat{X}$ un représentant de $(y_n)_n$. Alors pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand, $\delta(\widehat{(x_{nk})_{n \in \mathbb{N}}}, \widehat{x}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_{nk}, y_n) \leq 1/k \leq \epsilon$, donc $\widehat{(x_{nk})_{n \in \mathbb{N}}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \widehat{x}$. \widehat{X} est donc bien complet. \square

Preuve du théorème 1.1 : Supposons X complet et donnons-nous un espace métrique (Y, δ) et une isométrie $i : X \rightarrow Y$. Soit $(i(x_n))_n \in i(X)^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant dans Y ; notons $y \in Y$ sa limite. En particulier, c'est une suite de Cauchy. Soient $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$, $\delta(i(x_p), i(x_q)) < \epsilon$; ainsi, pour tout $p, q \geq N$, $d(x_p, x_q) < \epsilon$ c'est-à-dire que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy. X étant par hypothèse complet, $(x_n)_n$ converge dans X ; notons $x \in X$ sa limite. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(x_n, x) = \delta(i(x_n), i(x)) < \epsilon$. Par conséquent, $(i(x_n))_n$ converge vers $i(x)$. Par unicité de la limite, on a $y = i(x)$ c'est-à-dire $y \in i(X)$. Donc $i(X)$ est fermé dans Y .

Réciproquement, supposons que pour tout espace métrique (Y, δ) et pour toute isométrie $i : X \rightarrow Y$, $i(X)$ est fermé dans Y . Notons i l'isométrie entre X et l'espace métrique (\widehat{X}, δ) tel que construits par le lemme précédent. Alors $i(X)$ est fermé dans \widehat{X} ; or $i(X)$ est dense dans \widehat{X} , donc $i(X) = \widehat{X}$. Soit $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$, $d(x_p, x_q) = \delta(i(x_p), i(x_q)) < \epsilon$. Par conséquent, $(i(x_n))_n$ est une suite de Cauchy; or $i(X)$ est complet donc cette suite converge, notons $i(x) \in i(X)$ sa limite. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\delta(i(x_n), i(x)) = d(x_n, x) < \epsilon$. Donc $(x_n)_n$ est convergente. On en conclut que X est complet. \square

Remarquons que dans cette preuve, le fait que i soit une isométrie est primordial. Mais on peut se demander s'il est possible d'affaiblir cette hypothèse. S'il était possible de l'affaiblir en une hypothèse de continuité indépendante de la métrique, il se pourrait même que ce résultat puisse être généralisé aux espaces uniformes. Le contre-exemple suivant montre cependant que ces espoirs sont vains (on peut néanmoins moins montrer qu'en remplaçant l'hypothèse d'isométrie par une hypothèse de continuité uniforme, la réciproque reste vraie) :

Soit $f : \begin{cases} [1, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$. Alors pour tout $x, y \in [1, +\infty[$, $|f(x) - f(y)| = \left| \frac{y-x}{xy} \right| \leq |y-x|$, c'est-à-dire que f est 1-lipschtzienne, hypothèse à peine moins forte que l'isométrie. Pourtant, $i([1, +\infty[) =]0, 1]$ n'est pas fermé dans \mathbb{R} alors que $[1, +\infty[$ est complet.

2 Compacité et fermeture

Théorème 2.1 : Soit X un espace topologique complètement régulier³. Alors X est compact si, et seulement si, pour tout espace topologique séparé Y et pour toute application continue $f : X \rightarrow Y$, $f(X)$ est fermé dans Y .

Donnons d'abord quelques définitions utiles pour la suite :

Définition : Soit X un espace topologique. On dit que X est :

- (T_0) si pour tout $x, y \in X$, il existe un ouvert $O \subset X$ tel que $x \in O$ et $y \notin O$ ou $x \notin O$ et $y \in O$,
- (T_2) si pour tout $x, y \in X$ distincts, il existe deux ouverts disjoints U, V tels que $x \in U$ et $y \in V$,
- $(T_{3\frac{1}{2}})$ si pour tout fermé $F \subset X$ et tout $x \in X \setminus F$, il existe une fonction continue $f : X \rightarrow [0, 1]$ telle que $f(x) = 1$ et $f|_F = 0$,
- (T_4) si pour tous fermés disjoints F, G de X , il existe deux ouverts disjoints U, V tels que $F \subset U$ et $G \subset V$.

Définition : Soit X un espace topologique. On dit que X est un espace :

- de Kolmogorov si X est (T_0) ,
- séparé si X est (T_2) ,
- de Tychonov ou complètement régulier si X est (T_2) et $(T_{3\frac{1}{2}})$,
- normal si X est (T_2) et (T_4) .

Définition : Soient X un espace topologique, $(Y_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille d'espaces topologiques et $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille d'applications où pour tout $\lambda \in L$, $f_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda$. On dit que la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$:

- sépare les points de X si pour tout $x, y \in X$ distincts, il existe $\lambda \in L$ tel que $f_\lambda(x) \neq f_\lambda(y)$,
- sépare les points et les fermés de X si pour tout fermé $A \subset X$ et pour tout $x \in X \setminus A$, il existe $\lambda \in L$ tel que $f_\lambda(x) \notin \overline{f_\lambda(A)}$.

Ensuite, rappelons quelques résultats de topologie élémentaire :

Lemme 1 : Soient X un espace topologique quasi-compact, Y un espace topologique séparé et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Alors $f(X)$ est quasi-compact dans Y .

Preuve : Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement d'ouverts de $f(X)$, c'est-à-dire $f(X) = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. On

a donc $X \subset f^{-1}(f(X)) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} \Omega_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(\Omega_i)$. Par continuité de f , on en déduit que $(f^{-1}(\Omega_i))_{i \in I}$ est un recouvrement d'ouverts de X . Par compacité de X , il existe une partie finie $J \subset I$ telle que $(f^{-1}(\Omega_i))_{i \in J} = X$. Fixons une telle partie J . Alors $f(X) = f\left(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(\Omega_i)\right) = \bigcup_{i \in J} f(f^{-1}(\Omega_i)) \subset \bigcup_{i \in J} \Omega_i$. Ainsi, $(\Omega_i)_{i \in J}$ est un sous-recouvrement de $f(X)$, montrant que $f(X)$ est bien quasi-compact. \square

Lemme 2 : Soient X un espace topologique compact et Y une partie de X . Si Y est fermé dans X , alors il est compact.

Preuve : Soit $(O_i \cap Y)_{i \in I}$ un recouvrement d'ouverts de Y . Alors $X = \bigcup_{i \in I} (O_i \cup X \setminus Y)$,

donc $(O_i \cup X \setminus Y)_{i \in I}$ définit un recouvrement d'ouverts de X puisque Y est fermé. Il existe donc $J \subset I$ fini tel que $X = \bigcup_{i \in J} (O_i \cup X \setminus Y)$. Ainsi, $Y = Y \cap \bigcup_{i \in J} (O_i \cup X \setminus Y) = \bigcup_{i \in J} (O_i \cap Y)$,

c'est-à-dire que nous avons extrait du recouvrement $(O_i \cap Y)_{i \in I}$ un sous-recouvrement fini. Par conséquent, Y est une partie compact de X . \square

³. Cette hypothèse n'est en fait pas contraignante. On peut en effet montrer que tout espace compact est complètement régulier.

Lemme 3 : Soient X un espace topologique séparé et Y une partie compacte de X . Alors Y est fermée dans X .

Preuve : Soit $x \in X \setminus A$. X étant séparé, pour tout $y \in X$, il existe deux ouverts U_y et V_y tels que $x \in V_y$, $y \in U_y$ et $V_y \cap U_y = \emptyset$. Ainsi $(U_y)_{y \in A}$ est un recouvrement d'ouverts de A . Par compacité de A , il existe un sous-recouvrement fini $(U_y)_{y \in K}$ de A que nous fixons. Alors $\bigcap_{y \in K} V_y$ est ouvert contenant x , puisque produit fini d'ouverts contenant x . De plus, $A \cap \left(\bigcap_{y \in K} V_y \right) \subset \bigcap_{y \in K} (V_y \cap U_y) = \emptyset$, ce qui montre que $X \setminus A$ est ouvert ou bien que A est fermé. \square

Voici un des résultats à la base de la preuve du théorème 2.1 :

Théorème 2.2 : Un espace topologique est complètement régulier si, et seulement si, il est homéomorphe à un sous-espace d'un cube $[0, 1]^I$.

Avant démontrer ce théorème, intéressons-nous aux lemmes suivants :

Lemme 4 : Soient X un espace topologique, $(Y_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille d'espaces topologiques, $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille d'applications continues où pour tout $\lambda \in L$, $f_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda$. Soit $e :$

$$\begin{cases} X & \rightarrow & \prod_{\lambda \in L} Y_\lambda \\ x & \mapsto & (f_\lambda(x))_{\lambda \in L} \end{cases} . \text{ Alors :}$$

(i) e est une application continue.
(ii) Supposons que $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ sépare les points et les fermés de X . Alors e est une application ouverte de X dans $e(X)$.
(iii) e est injective si, et seulement si, $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ sépare les points de X .

Preuve : Montrons (i). Soit O un ouvert de $\prod_{\lambda \in L} Y_\lambda$. Par caractérisation de la topologie produit, on peut écrire $O = \prod_{\lambda \in L} O_\lambda$, avec $O_\lambda \subset Y_\lambda$ des ouverts tels que $O_\lambda = Y_\lambda$ sauf pour un nombre fini d'indices, que nous noterons K . Par continuité, pour tout $\lambda \in K$, il existe un ouvert $\Omega_\lambda \subset X$ tel que $f_\lambda(\Omega_\lambda) \subset O_\lambda$. Notons $\Omega_\lambda = X$ pour $\lambda \notin K$ et posons $\Omega = \bigcap_{\lambda \in L} \Omega_\lambda$; l'intersection étant finie, c'est un ouvert de X . Alors $e(\Omega) = (f_\lambda(\Omega))_{\lambda \in L} \subset \left(\bigcap_{\mu \in L} f_\mu(\Omega_\mu) \right) \subset (f_\lambda(\Omega_\lambda))_{\lambda \in L} \subset \prod_{\lambda \in L} O_\lambda = O$. Ainsi, e est continue.

Montrons (iii) :

$$\begin{aligned} e \text{ injective} &\Leftrightarrow \forall x, y \in X, (e(x) = e(y)) \Rightarrow (x = y), \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in X, (\forall \lambda \in L, f_\lambda(x) = f_\lambda(y)) \Rightarrow (x = y), \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in X, (x \neq y) \Rightarrow (\exists \lambda \in L, f_\lambda(x) \neq f_\lambda(y)), \\ &\Leftrightarrow (f_\lambda)_{\lambda \in L} \text{ sépare les points de } X. \end{aligned}$$

Montrons (ii). Soient U un ouvert de X et $e(x) \in e(U)$. Comme $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ sépare les points et les fermés de X , il existe $\mu \in L$ tel que $f_\mu(x) \notin \overline{f_\mu(X \setminus U)}$. Alors $\Omega = \left(\prod_{\lambda \in L \setminus \{\mu\}} Y_\lambda \right) \times \left(Y_\mu \setminus \overline{f_\mu(X \setminus U)} \right)$ est un ouvert de $\prod_{\lambda \in L} Y_\lambda$ et $e(x) \in \Omega \cap e(X)$, c'est-à-dire que $e(U)$ est un ouvert de $e(X)$. Ainsi, e est une application ouverte. \square

Lemme 5 : Soit X un espace topologique (T_0) et $(T_{3\frac{1}{2}})$. Alors X est homéomorphe à un sous-espace d'un cube $[0, 1]^I$.

Preuve : Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ la famille des applications continues de X dans $[0, 1]$. Posons $e :$

$$\begin{cases} X & \rightarrow & [0, 1]^L \\ x & \mapsto & (f_\lambda(x))_{\lambda \in L} \end{cases} .$$

D'après le lemme 4, il suffit de montrer que la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ sépare les points de X puis sépare les points et les fermés de X pour montrer que e définit un homéomorphisme entre X et $e(X) \subset [0, 1]^L$.

Soient $x, y \in X$ distincts. Comme X est (T_0) , il existe un ouvert U contenant uniquement l'un des deux points x et y . Sans perte de généralité, supposons que $x \in U$ et $y \notin U$. Alors $X \setminus U$ est fermé et ne contient que le point y . Puisque X est $(T_{3\frac{1}{2}})$, il existe une application $g : X \rightarrow [0, 1]$ continue telle que $g|_{X \setminus U} = 0$ et $g(x) = 1$. En particulier, $g(x) \neq g(y)$. Or g appartient à la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ donc $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ sépare les points de X . Soient F un fermé et $x \in X \setminus F$. Comme X est $(T_{3\frac{1}{2}})$, il existe une application $h : X \rightarrow [0, 1]$ continue telle que $h|_F = 0$ et $h(x) = 1$. En particulier, $h(x) \notin \overline{h(F)} = \{0\}$ et comme h appartient à la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$, on en déduit que $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ sépare les points et les fermés de X , ce qui achève la démonstration. \square

Lemme 6 : Pour tout ensemble non vide I , $[0, 1]^I$ est complètement régulier.

Preuve : Soient $F \subset [0, 1]^I$ un fermé et $x = (x_i)_{i \in I} \notin F$. Alors $[0, 1]^I \setminus F$ est voisinage ouvert de x , donc il existe une partie finie $J \subset I$ et un réel $\epsilon > 0$ tels que $\prod_{i \in J}]x_i - \epsilon, x_i + \epsilon[\times \prod_{i \in I \setminus J} [0, 1]$. Pour tout $j \in J$, soit $g_j : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ affine par morceaux telle que g_j vaut 1 en x_j et 0 sur $[0, 1] \setminus]x_j - \epsilon, x_j + \epsilon[$. Posons ensuite $f = \prod_{j \in J} g_j \circ \text{pr}_j$. Les g_j étant continues, il en est de même pour f . De plus, $f(x) = \prod_{j \in J} g_j(x_j) = 1$. Ensuite, soit $y = (y_i)_{i \in I} \in F$. Alors il existe $k \in J$ tel que $y_k \notin]x_k - \epsilon, x_k + \epsilon[$. Alors $g_k \circ \text{pr}_k(y) = g_k(y_k) = 0$, donc $f(y) = 0$. On a donc montré que $f|_F = 0$. Par conséquent, f convient pour montrer que $[0, 1]^I$ est complètement régulier. \square

Nous pouvons dès lors revenir au théorème 2.2 :

Preuve du théorème 2.2 : Soit X un espace topologique. Supposons X complètement régulier. Alors, puisque (T_2) implique (T_0) , X est (T_0) et $(T_{3\frac{1}{2}})$, et X est homéomorphe à un sous-espace d'un cube $[0, 1]^I$ d'après le lemme 5⁴. Réciproquement, supposons X homéomorphe à un sous-espace d'un cube $[0, 1]^I$. Or ce sous-espace est complètement régulier, puisque $[0, 1]^I$ est lui-même complètement régulier (lemme 6), par conséquent X est nécessairement complètement régulier. \square

Voici enfin le second théorème à la base de la démonstration du théorème 2.1. Combiné au théorème 2.2, il permet de montrer que tout espace complètement régulier peut être plongé de manière homéomorphe dans un espace compact :

Théorème 2.3 : (de *Tykhonov*) Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques séparés. Alors $\prod_{i \in I} X_i$ est compact si, et seulement si, pour tout $i \in I$, X_i est compact⁵.

Preuve : Supposons $\prod_{i \in I} X_i$ compact. Soit $i \in I$. Par définition de la topologie produit,

$\text{pr}_i : \prod_{j \in I} X_j \rightarrow X_i$ est continue, et puisque X_i est séparé, on en déduit que $X_i = \text{pr}_i \left(\prod_{j \in I} X_j \right)$ est compact (lemme 1).

Réciproquement, supposons que pour tout $i \in I$, X_i soit compact. Soit \mathfrak{U} un ultrafiltre sur $\prod_{i \in I} X_i$. Alors pour tout $i \in I$, $\text{pr}_i(\mathfrak{U})$ est une base d'ultrafiltre sur X_i qui converge vers un point $a_i \in X_i$ par compacité. Notons $a = (a_i)_{i \in I}$. Montrons que \mathfrak{U} converge vers a . Soit V un ouvert contenant a . On peut écrire $V = \prod_{i \in I} O_i$ avec les O_i ouverts et $O_i = X_i$ sauf pour un nombre fini d'indices. Notons $K = \{i \in I \mid O_i \neq X_i\}$. Alors pour tout $i \in K$, il existe $B \in \mathfrak{U}$ tel que $\text{pr}_i(B) \subset O_i$; comme $B \subset \text{pr}_i^{-1}(\text{pr}_i(B)) \subset \text{pr}_i^{-1}(O_i)$, on a $\text{pr}_i^{-1}(O_i) \in \mathfrak{U}$. Finalement, on a $V = \bigcap_{i \in I} \text{pr}_i^{-1}(O_i) = \bigcap_{i \in K} \text{pr}_i^{-1}(O_i) \in \mathfrak{U}$ puisque K est fini. Donc \mathfrak{U} est convergent et $\prod_{i \in I} X_i$ est compact. \square

4. L'adhérence de l'image de X par l'homéomorphisme construit dans la preuve du lemme 5 est appelé le compactifié de Stone-Čech, noté βX .

5. On pourra trouver une démonstration n'utilisant pas de filtres dans *Topology, a first course* de James Munkres.

Démontrons enfin notre théorème principal :

Preuve du théorème : Supposons que X soit compact. Soient Y un espace topologique séparé et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Alors $f(X)$ est une partie quasi-compacte de Y (lemme 1). Or Y est séparé, donc $f(X)$ également c'est-à-dire que $f(X)$ est compact. Il est par conséquent fermé dans Y (lemme 3).

Réciproquement, supposons que pour tout espace topologique séparé Y et pour toute application continue $f : X \rightarrow Y$, $f(X)$ soit fermé dans Y . X étant complètement régulier, il existe un cube $[0, 1]^I$ et une application continue $f : X \rightarrow [0, 1]^I$ telle que X soit homéomorphe à $f(X)$ (théorème 2.2). Or $[0, 1]^I$ est compact (théorème de Tychonov) et par hypothèse $f(X)$ est fermé dans $[0, 1]^I$, donc $f(X)$ est compact (lemme 2). X étant homéomorphe à un espace topologique compact, il est lui-même compact, ce qui achève la démonstration. \square

3 Compacité et complétude

Théorème 3.1 : Soit X un espace topologique compact. Alors il existe une unique structure uniforme \mathcal{U} compatible avec la topologie de X . De plus, muni de cette structure uniforme, X est complet et précompact (i.e. de complété compact).

Réciproquement, si X est un espace uniforme complet et précompact, alors X est compact.

Avant de démontrer ce théorème, intéressons-nous au lemme suivant :

Lemme : Soit (X, \mathcal{U}) un espace uniforme. Notons \mathfrak{S} l'ensemble des entourages symétriques de X . Alors pour tout $V \in \mathfrak{S}$ et pour tout $M \subset X \times X$, VMV est un voisinage de M . De plus, $\overline{M} = \bigcap_{V \in \mathfrak{S}} VMV$. On en déduit notamment que $X \times X$ admet un système fondamental d'entourages fermés.

Preuve : Toute structure uniforme admettant une base d'entourages symétriques, on supposera dans cette preuve que tous les entourages seront symétriques. Soit $M \subset X \times X$. Remarquons que $M \subset V \circ M \circ V$ et que pour tout $(x, y) \in M$, $V(x) \times V(y) \subset V \circ M \circ V$. En effet, la première inclusion est immédiate, puis pour tout $(x, y) \in M$ et pour tout $(p, q) \in V(x) \times V(y)$, on a $(p, x), (y, q) \in V$ c'est-à-dire $(p, q) \in V \circ M \circ V$. Or $V(x) \times V(y)$ est un voisinage de (x, y) , donc $V \circ M \circ V$ est bien un voisinage de M .

Pour la deuxième affirmation, puisque $\{V(x) \times V(y), V \in \mathfrak{S}\}$ est une base de voisinage de $(x, y) \in X$, on a :

$$\begin{aligned} (x, y) \in \overline{M} &\Leftrightarrow \forall W \in \mathcal{V}(x, y), W \cap M \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall V \in \mathfrak{S}, M \cap V(x) \times V(y) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall V \in \mathfrak{S}, \exists (p, q) \in M, (p, q) \in V(x) \times V(y) \\ &\Leftrightarrow \forall V \in \mathfrak{S}, (x, y) \in V \circ M \circ V \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in \bigcap_{V \in \mathfrak{S}} V \circ M \circ V \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $U \in \mathcal{U}$, il existe $W \in \mathfrak{S}$ tel que $\overset{3}{\overline{W}} \subset U$, et alors $\overline{W} = \bigcap_{V \in \mathfrak{S}} V \circ W \circ V \subset$

$\overset{3}{\overline{W}} \subset U$, donc $\{\overline{W}, W \in \mathfrak{S}\}$ est une base d'entourages fermés de \mathcal{U} , prouvant la troisième affirmation du lemme. \square

Preuve du théorème 3.1 : Soit X un espace topologique compact. Supposons que X soit uniformisable, et notons \mathcal{U} une structure uniforme compatible avec sa topologie. Soit $V \in \mathcal{U}$ symétrique. Alors d'après le lemme, $\overset{2}{\overline{V}} = V \circ \Delta \circ V$ est un voisinage de Δ . Comme tout espace uniforme admet un système fondamental d'entourages symétriques, on en déduit que nécessairement tout élément de \mathcal{U} est un voisinage de Δ .

Par l'absurde, supposons qu'il existe un voisinage V de Δ n'appartenant pas à \mathcal{U} . On sait néanmoins que pour tout $W \in \mathcal{U}$, $W \setminus V \neq \emptyset$. Ainsi, $\{W \setminus V, W \in \mathcal{U}\}$ engendre un filtre \mathfrak{F} sur $X \times X$, qui doit admettre un point d'adhérence $a \notin \Delta$. Or si a est adhérent à \mathfrak{F} , alors il est également adhérent à \mathcal{U} , donc $a \in \bigcap_{W \in \mathcal{U}} \overline{W}$. D'après le lemme, \mathcal{U} admet un système fondamental d'entourages fermés. De plus, X est séparé, donc il existe $U, W \in \mathcal{U}$ fermés

tels que $U(x) \cap W(y) = \emptyset$. Donc $x \notin W(y)$, c'est-à-dire $(x, y) \notin W$ et $(x, y) \notin \bigcap_{W \in \mathcal{U}} \overline{W}$. Par conséquent, $\bigcap_{W \in \mathcal{U}} \overline{W} \subset \Delta$, ce qui est contradictoire.

Nous avons donc démontré que si X est uniformisable, alors \mathcal{U} est l'ensemble des voisinages de Δ . Montrons que \mathcal{U} est bien une structure uniforme. Comme $(x, y) \mapsto (y, x)$ est une application continue, on en déduit que pour tout $V \in \mathcal{U}$, $\overline{V}^{-1} \in \mathcal{U}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $A \in \mathcal{U}$ tel que pour tout $W \in \mathcal{U}$, $\overline{W} \setminus A \neq \emptyset$. Alors $\{\overline{W} \setminus A, W \in \mathcal{U}\}$ engendre un filtre \mathfrak{F} sur $X \times X$, qui doit avec un point adhérent $(x, y) \notin \Delta$. Comme X est en particulier normal, il existe deux fermés disjoints V_1, V_2 et deux ouverts disjoints U_1, U_2 tels que $x \in V_1 \subset U_1$ et $y \in V_2 \subset U_2$. Posons $U_3 = X \setminus (V_1 \cup V_2)$ et $W = \bigcup_{i=1}^3 U_i \times U_i$. Alors W est un voisinage de Δ , donc $W \in \mathcal{U}$ et en particulier $\overline{W} \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset$. Soit donc $(a, b) \in \overline{W} \cap (V_1 \times V_2)$. Alors il existe $c \in X$ tel que $(a, c), (c, b) \in W$. Or $a \in V_1 \subset U_1$ implique que $c \in U_1$, puis $c \in U_1$ implique que $b \in U_1$. Ainsi, $b \in U_1 \cap V_2 \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset$, ce qui est impossible. Par conséquent, pour tout $V \in \mathcal{U}$, il existe $W \in \mathcal{U}$ tel que $\overline{W} \subset V$. On en déduit que \mathcal{U} est une structure uniforme.

Pour montrer que X est bien uniformisable, il nous reste donc à montrer que \mathcal{U} est compatible avec la topologie de X . Pour plus clarté, notons T_C la topologie compacte de X et $T_{\mathcal{U}}$ la topologie induite par \mathcal{U} sur X . Soient $x \in X$ et V un voisinage de x pour $T_{\mathcal{U}}$. Alors il existe $W \in \mathcal{U}$ tel que $W(x) \subset V$. Soit $\pi_x : \begin{cases} (X, T_C) & \rightarrow & (X \times X, T_C \times T_C) \\ y & \mapsto & (x, y) \end{cases}$. Comme π_x est continue et que $W(x) = \pi_x^{-1}(W)$, on en déduit que $W(x)$ est un entourage de x pour T_C . Puisque $W(x) \subset V$, V est par conséquent un voisinage de x pour T_C . Ainsi, $T_{\mathcal{U}}$ est moins fine que T_C , et en particulier, $\text{Id} : (X, T_C) \rightarrow (X, T_{\mathcal{U}})$ est continue. De plus, nous avons montré précédemment que $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{U} \subset \Delta$. L'inclusion inverse est immédiate, donc $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{U} = \Delta$, c'est-à-dire que la topologie $T_{\mathcal{U}}$ est séparée, donc Id est fermée. Par conséquent, Id est un homéomorphisme, c'est-à-dire que $T_C = T_{\mathcal{U}}$.

Munissons X de la structure uniforme \mathcal{U} . Alors tout filtre de Cauchy admet un point d'adhérence, et converge donc. Ainsi, X est complet. On en déduit que le complété $\widehat{X} = X$ est compact, et donc que X est précompact.

Réciproquement, soit X un espace uniforme complet et précompact. Alors le complété de $\widehat{X} = X$ est compact, ce qui achève la démonstration. \square

Au vue de la preuve, le principal intérêt du résultat semble être l'existence et l'unicité d'une structure uniforme compatible avec la compacité d'un espace topologique. Ce théorème gagne en effet en intérêt avec la caractérisation suivante de la précompacité :

Propriété 3.2 : Soit X un espace uniforme. Alors X est précompact si, et seulement si, pour tout entourage V il existe un recouvrement fini de X en parties petites d'ordre V ⁶.

On obtient comme corollaire immédiat le résultat suivant, dont on donnera cependant une preuve indépendante de ce qui a été fait précédemment :

Théorème 3.3 : Soit (X, d) un espace métrique. Alors X est compact si, et seulement si, X est complet et si pour tout $r > 0$ il existe un recouvrement fini de X en boules ouvertes de rayon r .

Preuve : Supposons X compact. Alors toute suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence et converge donc, i.e. X est complet. De plus, $(B(x, r))_{x \in X}$ est un recouvrement de X par des boules ouvertes de rayon $r > 0$, qui admet un sous-recouvrement fini par compacité.

6. Le résultat est bien sûr toujours vrai si l'on demande à V d'appartenir à une base fondamentale de voisinages.

Réciproquement, supposons que X est complet et que pour tout $r > 0$ il existe un recouvrement fini de X en boules ouvertes de rayon r . Soit $(x_k)_k \in X^{\mathbb{N}}$. Nous allons construire par récurrence une suite décroissante d'ouverts $(B_n)_{n \geq 1}$ contenant chacun une infinité de termes de la suite $(x_k)_k$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\text{diam}(B_n) \leq 1/n$.

Par hypothèse, X s'écrit comme union finie de boules ouvertes de rayon 1. Donc l'une au moins de ces boules contient une infinité de termes de $(x_k)_k$. Soit B_1 une telle boule.

Supposons maintenant construit les ouverts $B_1 \subset \dots \subset B_{n-1}$ ($n \geq 1$) vérifiant les propriétés annoncées. Par hypothèse, X s'écrit comme union finie de boules ouvertes de rayon $1/n$. En particulier, ces boules recouvrent B_{n-1} . Comme B_{n-1} contient une infinité de termes de $(x_k)_k$, il existe au moins une de ces boules dont l'intersection avec B_{n-1} contient une infinité de termes de $(x_k)_k$. Notons B_n cette intersection. En particulier, $B_n \subset B_{n-1}$ et $\text{diam}(B_n) \leq 1/n$.

Notre suite $(B_n)_n$ est ainsi construite par récurrence. On construit ensuite par récurrence une application $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{\varphi(n)} \in B_n$ et $\varphi(n+1) > \varphi(n)$. Alors $(x_{\varphi(n)})_n$ est une sous-suite telle que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \geq N$, $x_{\varphi(n)} \in B_N$. Or $\text{diam}(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc cette sous-suite est de Cauchy. Comme X est complet, cette sous-suite est par conséquent convergente, et sa limite est valeur d'adhérence de $(x_k)_k$. On en déduit que X est bien compact. \square

Références

F. Guenard et G. Lelievre, *Compléments d'analyse. Volume 1, topologie*, Cahiers de Fontenay (1981).

N. Bourbaki, *Topologie générale. Chapitre de 1 à 4*, Springer (1971).

J. Marco, *Analyse L3*, Pearson Education (2009).

Et merci à Ksilver pour m'avoir donné les idées de base de ce document !

Glossaire

Espace topologique : Un espace topologique est un ensemble X muni d'une famille de sous-ensembles T telle que :

- (i) $X \in T$,
- (ii) T est stable par intersection finie,
- (iii) T est stable par union quelconque.

Les éléments de T sont appelés les ouverts de X , et leurs complémentaires les fermés de X .

Densité : Soient X un espace topologique et $A \subset X$. On dit que A est dense dans X si pour tout $x \in X$ et pour tout ouvert O contenant x , $O \cap A \neq \emptyset$.

Continuité : Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application. On dit que f est continue si pour tout ouvert O de Y , $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X .

Homéomorphisme : Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application. On dit que f est un homéomorphisme si f est bijective et bicontinue (i.e. continue et d'inverse également continue).

Quasi-compacité : Soit X un espace topologique. On dit que X est quasi-compact si pour toute famille d'ouverts $(O_i)_{i \in I}$ telle que $\bigcup_{i \in I} O_i = X$ (i.e. pour tout recouvrement ouvert de X), il existe un sous-recouvrement fini.

Compacité : Un espace topologique X est dit compact s'il est séparé (cf. Définition 2) et quasi-compact.

Espace métrique : Un espace métrique est un ensemble X muni d'une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- (i) $\forall x, y \in X, (d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$,
- (ii) $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$,
- (iii) $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

On muni alors canoniquement X de la topologie : $O \subset X$ est ouvert si, et seulement si, pour tout $x \in O$ il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O$.

Isométrie : Soient $(X, d), (Y, \delta)$ deux espaces métriques et $i : X \rightarrow Y$ une application. On dit que i est une isométrie si pour tous $x, y \in X, \delta(i(x), i(y)) = d(x, y)$.

Suite de Cauchy : Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ une suite. On dit que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$, $d(x_p, x_q) \leq \epsilon$.

Complétude : Un espace métrique est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente.