LES LIMITES

Introduction

Considérons la fonction f définie sur $]1\ ;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x-4}{x-1}$$

- Calculons ses valeurs (arrondies à 10^{-5} près par défaut) lorsque la variable x devient de plus en plus grande :

x	2	5	10	50	100	1 000	10 000
$f(x)$	2	2,75	2,88889	2,97959	2,98989	2,99899	2,99989

On constate que lorsque les nombres x deviennent de plus en plus grands, les nombres $f(x)$ s'approchent aussi près que voulu du nombre 3. **On dira que la limite de f en $+\infty$ est égale à 3**.

- Calculons maintenant les valeurs de la fonction lorsque la variable x s'approche de plus en plus de la valeur interdite 1 :

x	0,5	0,8	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1	1,2	1,5	2
$f(x)$	5	8	13	103	1003	10003		−9997	−997	−97	−7	−2	1	2

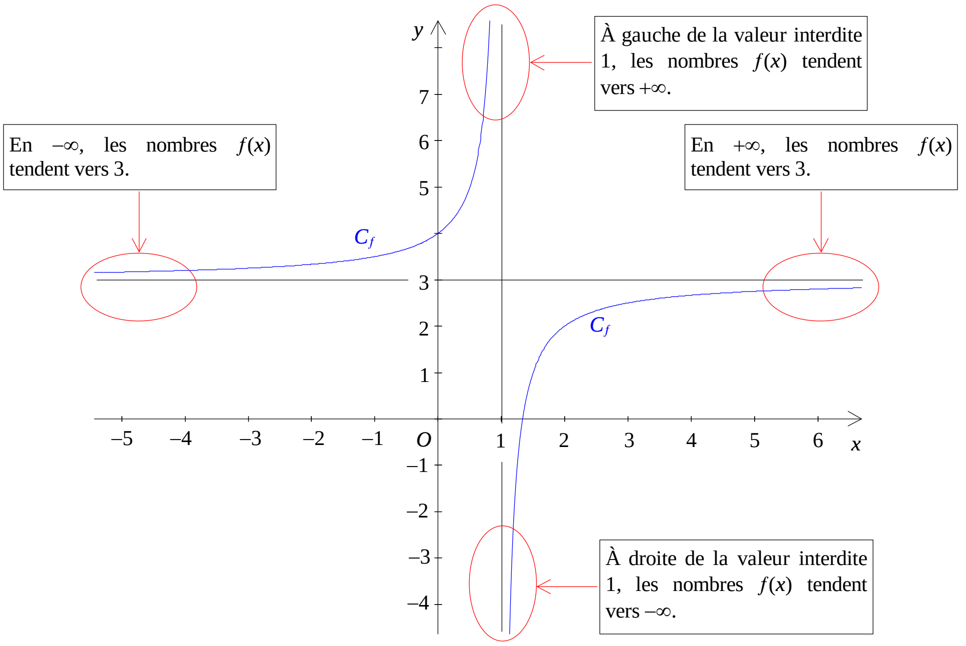
On constate, cette fois, que selon le côté dont on s'approche de la valeur interdite 1 (droite ou gauche), les nombres $f(x)$ n'ont pas du temps le même comportement (puisque à droite les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus proche de $+\infty$ tandis qu'à gauche ils deviennent de plus en plus proches de $-\infty$). **On dira que la fonction f n'a pas de limite en 1**.

On pourra cependant nuancer en disant :

la limite de f en 1 **à gauche** est égale à $+\infty$

la limite de f en 1 **à droite** est égale à $-\infty$

Évidemment, toutes ces considérations purement calculatoires, peuvent avoir un appui graphique :



I) DÉFINITIONS

1. Limite d'une fonction en +∞

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle du type $[a\ ;\ +\infty[$.

Définitions intuitives

Lorsque **x prend des valeurs de plus en plus grandes** :

Si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus

- **grands**[1] , on dit que **f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$** et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- **grands en valeur absolue mais négatifs**, on dit que **f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$** et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- **proches**[2] **d'un réel ℓ**, on dit que **f a pour limite ℓ en $+\infty$** et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

Définitions rigoureuses (données ici à titre indicatif)

- Si pour tout réel M positif, il existe un réel A tel que :

$$x \geqslant A \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant M$$

Alors on dit que **f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$** et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- Si pour tout réel M négatif, il existe un réel A tel que :

$$x \geqslant A \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant M$$

Alors on dit que **f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$** et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

- S'il existe un réel ℓ tel que pour tout intervalle $I =]\ell - \varepsilon\ ;\ \ell + \varepsilon[$ $(\varepsilon > 0)$, il existe un réel A tel que :

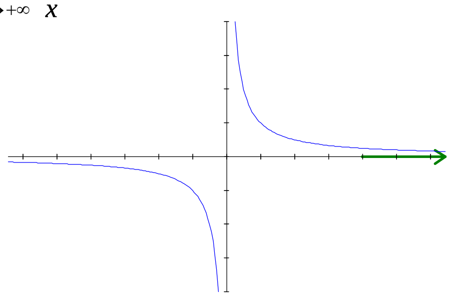
$$x \geqslant A \Rightarrow\ f(x) \in I$$

Alors on dit que **f a pour limite ℓ en $+\infty$** et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

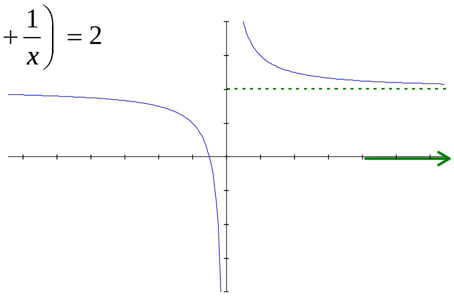
Au niveau première nous travaillerons plutôt de manière intuitive.

Exemples

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$



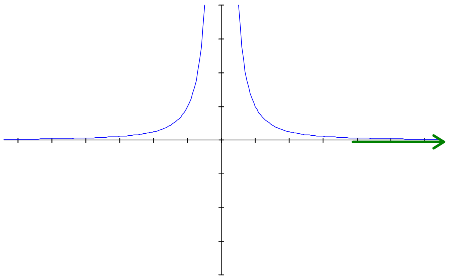
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + \dfrac{1}{x}\right) = 2$



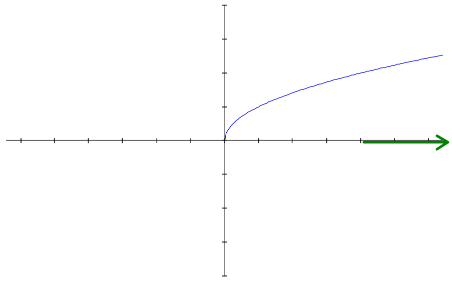
(1) Par l'expression "de plus en plus grand", il faut entendre "aussi grand que voulu".

(2) Par l'expression "de plus en plus proche", il faut entendre "aussi proche que voulu".

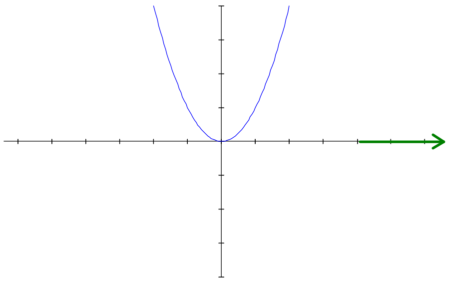
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$



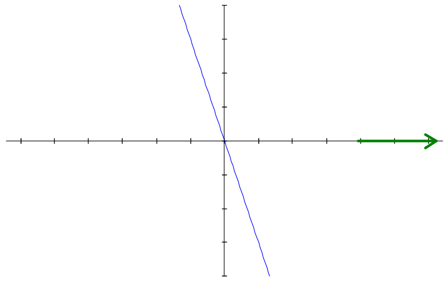
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$



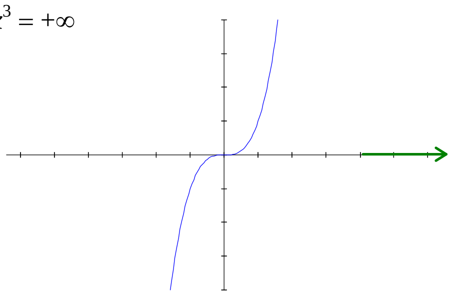
$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$



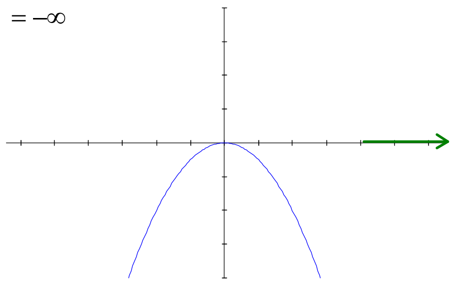
$$\lim_{x \to +\infty} (-3x) = -\infty$$



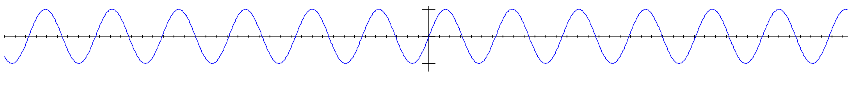
$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$



$$\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{x^2}{2}\right) = -\infty$$



Contre exemple : il existe des fonctions qui n'ont pas de limite en $+\infty$, c'est le cas, par exemple de la fonction sinus :



2. Limite d'une fonction en $-\infty$

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle du type $]-\infty\,;\,a]$.

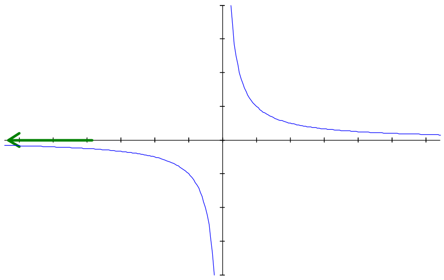
Lorsque **$-x$ prend des valeurs de plus en plus grandes** :

Si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus

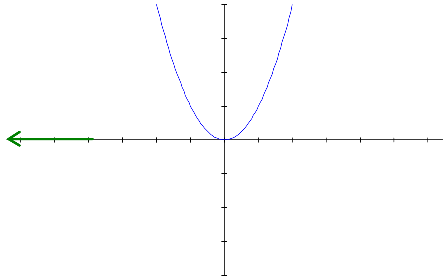
- **grands**, on dit que **f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$** et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- **proches d'un réel ℓ**, on dit que **f a pour limite ℓ en $-\infty$** et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$
- **grands en valeur absolue mais négatifs**, on dit que **f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$** et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Exemples

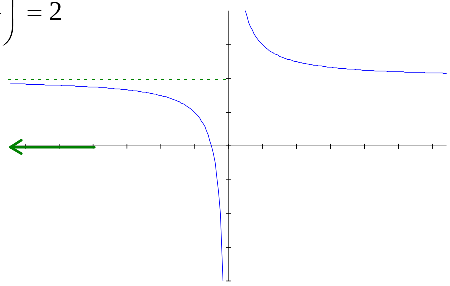
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$



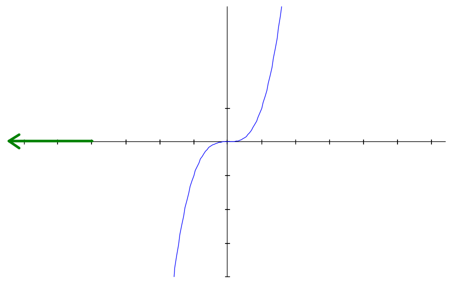
$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$



$$\lim_{x \to -\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$$



$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$



3. Limite d'une fonction en un réel *a*

Soit f une fonction définie sur un domaine D contenant a ou tel que a soit une borne de D.

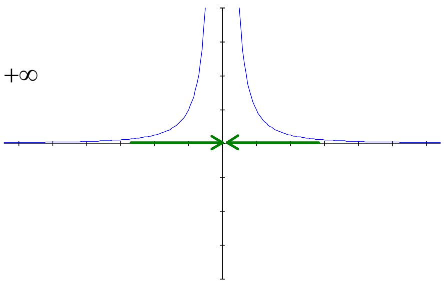
Lorsque **x prend des valeurs de plus en plus proches de *a*** :

Si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus

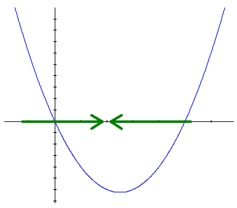
- **grands**, on dit que **f a pour limite $+\infty$ en a** et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$
- **proches d'un réel ℓ**, on dit que **f a pour limite ℓ en a** et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$
- **grands en valeur absolue mais négatifs**, on dit que **f a pour limite $-\infty$ en a** et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Exemples

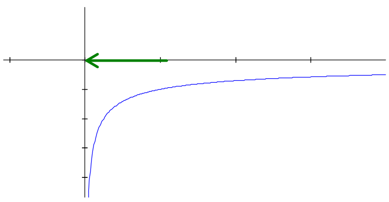
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$



$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 5x) = -6$$



$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$$



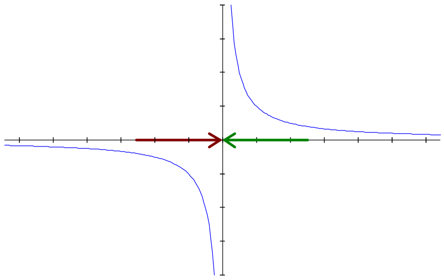
Contre exemple : il existe des fonctions qui n'ont pas de limite en a ; c'est le cas de la fonction inverse, qui n'a pas de limite en 0. Voir ci-après, au paragraphe 4.

4. Limite d'une fonction à droite (ou à gauche)

La fonction inverse n'a pas de limite en 0, car si x s'approche de 0, les nombres $\dfrac{1}{x}$ n'entrent pas dans le cadre de la définition donnée au paragraphe 3.

Cependant, on peut parler de limite "à droite" et de limite "à gauche" : on note alors 0^+ pour signifier que x s'approche de 0 par valeur supérieure et 0^- pour signifier que x s'approche de 0 par valeur inférieure.

Ainsi, on a : $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$



Exercices

On donne les fonctions f , g, h et k définies ci-dessous :

$f(x) = x^2 + 1$

$g(x) = -2x^3 + 5$

$h(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x}$

$k(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

> Dans cet exercice, on utilise par exemple le fait que si deux fonctions f et g ont pour limite a et b (a et b pouvant être des quantités infinies), alors la somme $f + g$ a pour limite $a + b$. Est-ce toujours valable ? Quand est-il du produit et du quotient de deux fonctions ? La deuxième partie "Opérations sur les limites" précise le champ de validité de ces raisonnements.

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) =$

$\lim\limits_{x \to 1^-} k(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 1^+} k(x) =$

II) OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Le point d'interrogation "?" signifie "forme indéterminée" : on ne peut pas donner de réponse dans le cas général, cela dépend des situations.

1. Limite d'une somme

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie), la fonction somme $f + g$ admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau ci-dessous :

$\lim g$ \ $\lim f$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (x + \dfrac{1}{x^2} - 1) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - 1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 + x + 15) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x + 15) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{1}{x^2} + 3x - 4) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} (3x - 4) = -4$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 + x + 15) = ?$ (forme indéterminée) car $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (x + 15) = -\infty$

  Dans ce dernier cas, on pourra lever l'indétermination en **se ramenant à un produit**. Mais voyons tout d'abord comment calculer la limite d'un produit.

2. Limite d'un produit

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie), la fonction produit $f\,g$ admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau ci-dessous :

$\lim g$ \ $\lim f$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Si $\ell = 0$ et si ℓ' est finie alors le produit fg tend vers 0

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (-5x^2) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} (-5) = -5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x(x + 3)) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x + 3) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}(3x + \sqrt{x}) = ?$ (forme indéterminée du type "$+\infty \times 0$").

  Méthode : **on se ramène à une somme en développant :**

$$\frac{1}{x}(3x + \sqrt{x}) = 3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Or : $\lim\limits_{x\to 0^+} 3 = 3$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Donc, par somme : $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(3+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}(3x + \sqrt{x}\,) = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2 + x + 15) =$? (forme indéterminée du type "$+\infty - \infty$").

  Méthode : **factorisation[(1)] par le terme de plus haut degré (pour les limites de fonctions polynômes en $+\infty$ ou $-\infty$ uniquement) :** $x^2 + x + 15 = x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{15}{x^2}\right)$

  Or : $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{15}{x^2}\right) = 1$

  Donc, par produit : $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{15}{x^2}\right) = +\infty$

  Conclusion : $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2 + x + 15) = +\infty$

  Remarquons que dans ce cas simple, on pouvait se contenter d'écrire $x^2 + x + 15 = x(x + 1) + 15$.

3. Limite d'un quotient

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie), la fonction quotient $\dfrac{f}{g}$ admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau ci-dessous :

lim g \ lim f	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	ℓ / ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	?	?
$-\infty$	0	?	?

Si $\ell' = 0$ et $\ell \neq 0$, alors le quotient $\dfrac{f}{g}$ tend vers $\pm\infty$.

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3}{2x^2+3} = 0$ car $\lim\limits_{x\to -\infty} (-3) = -3$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} (2x^2 + 3) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{x-2} = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} (x - 2) = -2$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right) =$? (forme indéterminée).

  Méthode : **réduction au même dénominateur**

  $$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x^2} = -\infty \text{ car } \lim_{x\to 0^+} (x - 1) = -1 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0 \text{ avec } x^2 > 0.$$

(1) Il ne s'agit pas d'une factorisation naturelle mais d'une mise en facteur "forcée".

LES 4 FORMES INDÉTERMINÉES A CONNAÎTRE			
"$0 \times \infty$"	"$\dfrac{0}{0}$"	"$\dfrac{\infty}{\infty}$"	"$\infty - \infty$"

Attention, on ne dira pas "zéro sur zéro est une forme indéterminée" mais plutôt "le quotient de deux fonctions tendant vers 0 est une forme indéterminée"

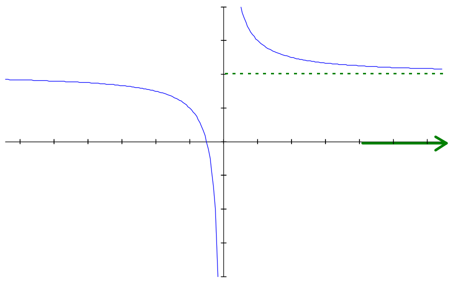
III) ASYMPTOTES

1. Asymptote horizontale

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = k$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = k$), on dit que la droite d'équation $y = k$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

Exemple :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + \dfrac{1}{x}\right) = 2$, donc la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$.

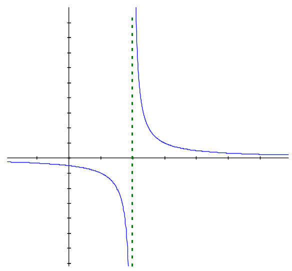


2. Asymptote verticale

Si une fonction f admet une limite infinie à gauche ou à droite en un réel a, alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe C_f.

Exemple :

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$ (et $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$), donc la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.



IV) THÉORÈMES DE COMPARAISONS (Admis)

1. Théorème de majoration, minoration

Soient f, u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a ; +\infty[$.

- Si, pour x assez grand, on a $f(x) \geqslant u(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- Si, pour x assez grand, on a $f(x) \leqslant v(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en a.

Exemples :

- Soit $f(x) = -x + \sin x$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

  Posons $v(x) = -x + 1$. Comme, pour tout x, $\sin x \leqslant 1$, on a, pour tout x, $f(x) \leqslant v(x)$.

  Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

- Soit $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

  Posons $u(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Comme, pour tout x, on a $1 \leqslant \sqrt{1+x^2}$, on a, pour tout x, $g(x) \geqslant u(x)$

  Or, $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

2. Théorème d'encadrement ou théorème des "gendarmes"

Soient f, u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a\ ;+\infty[$.

Si pour x assez grand, on a $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = \ell$,

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en a.

Exemples :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 1 + \dfrac{\sin x}{x}$

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Posons : $u(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

Comme, pour tout $x \neq 0$, on a : $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

On en déduit que pour tout $x \neq 0$: $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = 1$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$